第13卷 第1期
2020 年 3 月

highlights.paper.edu.cn
中国科技论文在线精品论文
Highlights of Sciencepaper Online

Vol.13 No.1
March 2020

带 *p*-Laplace 算子与参数的多点脉冲微分方程多解的存在性

张一尘，薛春艳

（北京信息科技大学理学院，北京 100192）

摘要：本文研究了一类含 p-Laplace 算子与参数的多点脉冲微分方程，并利用两个不同的全连续算子的不动点定理和 Banach 空间中的锥理论得到了该方程解对参数的依赖性与解的存在性，以及两个正解的存在性。

关键词：常微分方程；p-Laplace 算子；不动点定理；两个正解；参数；脉冲微分方程

中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1674-2850(2020)01-0001-14

Existence of multiple solutions of multi-point impulsive differential equations involving the *p*-Laplacian with parameter

ZHANG Yichen, XUE Chunyan

(*School of Applied Science*, *Beijing Information Science and Technology University*, *Beijing* 100192, *China*)

Abstract: In this paper, the multi-point impulsive differential equations involving the p-Laplacian with parameter are studied. By using the fixed point theorem of two different completely continuous operators and the cone theory of Banach space, the dependence of the solution on parameters and the existence of the solution are obtained, as well as the existence of two positive solutions.

Key words: ordinary differential equation; p-Laplacian; fixed point theorem; two positive solutions; parameter; impulsive differential equation

0 引言

近年来，带脉冲的 p-Laplace 算子的微分方程边值问题已成为研究的热点[1~2]。MA 等[3]研究了一类不带脉冲的 p-Laplace 算子的多点边值问题：

$$\begin{cases}\left(\phi_p\left(u'(t)\right)\right)'+q(t)f\left(t,u(t)\right)=0,\quad t\in(0,1),\\ u'(0)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i u'(\xi_i),\quad u(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\xi_i),\end{cases}$$

其中，$\phi_p(s)$ 为 p-Laplace 算子，$\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$，$p>1$，$\phi_p^{-1}=\phi_q$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 他们运用单调迭代的方法得到了正解的存在性。

ZHANG 等[4]研究了

基金项目：北京市自然科学基金（1163007）

作者简介：张一尘（1995—），男，硕士研究生，主要研究方向：微分方程的边值问题

通信联系人：薛春艳，教授，主要研究方向：非线性微分方程的可解性. E-mail: xuechunyan@126.com

$$\begin{cases}-\left(\phi_p\left(u'(t)\right)\right)'=g(t)f\left(t,u(t)\right),\ t\neq t_k,\ t\in(0,1),\\ -\vartriangle u|_{t=t_k}=I_k\left(u\left(t_k\right)\right),\ k=1,2,\cdots,n,\\ u(0)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i u\left(\xi_i\right),\ u'(1)=0,\end{cases}$$

通过运用不动点理论，证明了上述问题存在多个正解。

另外，ZHANG[5]在研究以下问题时

$$\begin{cases}-y''(t)+My(t)=\lambda\omega(t)f\left(t,y(t)\right),\ t\neq t_k,\ t\in J,\\ -\vartriangle y'|_{t=t_k}=\lambda I_k\left(t_k,y\left(t_k\right)\right),\ k=1,2,\cdots,n,\\ y'(0)=y'(1)=0,\end{cases}$$

其中，$\lambda>0$ 为一个参数。通过不动点定理，不仅得到了正解，还研究了其正解与参数之间的依赖关系。

受上述文献的启发，本文研究以下带参数与 p-Laplace 算子的二阶脉冲微分方程的多点边值问题（以下简称问题 1）：

$$\begin{cases}-\left(\phi_p\left(u'(t)\right)\right)'=\lambda g(t)f\left(t,u(t)\right),\ t\neq t_k,\ t\in(0,1),\\ -\vartriangle u|_{t=t_k}=\lambda I_k\left(u\left(t_k\right)\right),\ k=1,2,\cdots,n,\\ u'(0)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i u'\left(\xi_i\right),\ u(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i u\left(\xi_i\right),\end{cases}$$

其中，$t_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为固定的点，满足 $0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots<t_n<1$；$\xi_i(i=1,2,\cdots,m-2)\in(0,1)$ 为给定的点，满足 $0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1$ 且 $\xi_i\neq t_k$.

$\vartriangle u|_{t=t_k}$ 为 $u(t)$ 在 $t=t_k$ 处的跳跃，即

$$\vartriangle u|_{t=t_k}=u\left(t_k^+\right)-u\left(t_k^-\right),$$

其中，$u\left(t_k^+\right)$ 与 $u\left(t_k^-\right)$ 分别为 $u(t)$ 在 $t=t_k$ 处的右极限与左极限。

另外，g，f，I_k，α_i，β_i 还分别满足以下条件：

（H$_1$）$g\in C\left((0,1),[0,+\infty)\right)$ 并且满足 $0<\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s<\infty$，$C$ 为连续函数全体所形成的空间；

（H$_2$）$0\leqslant\alpha_i<1$，$0\leqslant\beta_i<1$，且 $0<\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i<1$，$0<\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i<1$；

（H$_3$）$f\in C\left([0,1]\times[0,+\infty),[0,+\infty)\right)$；

（H$_4$）$I_k\in C\left([0,+\infty),[0,+\infty)\right)$.

令 $J=[0,1]$，$J'=J\setminus\left\{t_1,t_2,\cdots,t_n\right\}$，$PC[0,1]=\{u\,|\,u:J\to\mathbb{R}$ 在 $t\neq t_k$ 处连续，在 $t=t_k$ 处左连续，并且 $u\left(t_k^+\right)$ 存在，$k=1,2,\cdots,n\}$. 令范数 $\|u\|_{PC}=\max\limits_{t\in J}\left|u(t)\right|$，则 $PC[0,1]$ 成为一个 Banach 空间。若 $u\in PC[0,1]\cap C^2(J')$ 且满足问题 1 及其各条件，则称 u 为问题 1 的一个解。

下面为本文所用的不动点定理。

定理 1 设 Ω_1 和 Ω_2 为 Banach 空间中的有界开集，$0\in\bar{\Omega}_1\in\Omega_2$，$P$ 为 E 中的锥，$A:P\cap\left(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1\right)\to P$ 全连续。如果下列条件满足：

1）$\|Ax\|\neq\|x\|$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$；$\|Ax\|\geqslant\|x\|$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$；

2）$\|Ax\|\geqslant\|x\|$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$；$\|Ax\|\neq\|x\|$，$\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$，

那么，A 在 $P\cap\left(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1\right)$ 中至少有一个不动点。

定理 2 设 K 为实 Banach 空间 E 中的一个锥，D 为 E 中的一个有界开子集，满足 $D_k=D\cap K\neq\varnothing$ 且 $\bar{D}_k\neq K$. 假设 $A:\bar{D}_k\to K$ 是全连续算子，使得 $x\neq Ax$，$\forall x\in\partial D_k$. 则下面的结论成立：

1）如果 $\|Ax\|\leqslant\|x\|$，$x\in\partial D_k$，那么 $i_k\left(A,D_k\right)=1$;

2）如果存在 $e\in K\setminus\{0\}$ 使得 $x\neq Ax+\eta e$，$\forall x\in\partial D_k$ 和 $\eta>0$，那么 $i_k\left(A,D_k\right)=0$;

3）令 U 为 K 中的开集，满足 $\bar{U}\subset D_k$. 如果 $i_k\left(A,D_k\right)=1$ 且 $i_k\left(A,U_k\right)=0$，那么 A 在 $D_k\setminus\bar{U}_k$ 有一个不动点。如果 $i_k\left(A,D_k\right)=0$ 且 $i_k\left(A,U_k\right)=1$，结论同样成立。

1 预备工作

引理 1 假设条件（H$_1$）～（H$_4$）成立，则 $u\in PC[0,1]\cap C^2(J')$ 是问题 1 的解当且仅当 $u\in PC[0,1]$ 是下面脉冲积分方程的解

$$u(t)=\frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_{\xi_i}^{1}\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f\left(r,u(r)\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k\left(u\left(t_k\right)\right)\right)\right]-$$
$$\int_t^1\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f\left(r,u(r)\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k\left(u\left(t_k\right)\right),\tag{1}$$

其中，A_u 满足

$$A_u=\phi_p\left(u'(0)\right)=\phi_p\left(\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^{\xi_i}g(s)f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right)\right),\tag{2}$$

即

$$\phi_q\left(A_u\right)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^{\xi_i}g(s)f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right).$$

证明：令 $u\in PC[0,1]\cap C^2(J')$ 是问题 1 的一个解。对问题 1 的第一个方程积分得

$$\phi_p\left(u'(t)\right)-\phi_p\left(u'(0)\right)=-\lambda\int_0^t g(s)f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s,$$

可得

$$u'(t)=\phi_q\left(\phi_p\left(u'(0)\right)-\lambda\int_0^t g(s)f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right).\tag{3}$$

若 $t_{n-1}<t\leqslant t_n$，对式（3）从 t_n 到 1 进行积分，可得

$$u(1)-u\left(t_n^+\right)=\int_{t_n}^1\phi_q\left(\phi_p\left(u'(0)\right)-\lambda\int_0^s g(r)f\left(r,u(r)\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s,\tag{4}$$

再对式（3）从 t 到 t_n^- 进行积分，可得

$$u\left(t_n^-\right)-u\left(t\right)=\int_t^{t_n}\phi_q\left(\phi_p\left(u'\left(0\right)\right)-\lambda\int_0^s g\left(r\right)f\left(r,u\left(r\right)\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\,. \tag{5}$$

结合式（4）和式（5），得

$$u\left(1\right)-u\left(t\right)=\int_t^1\phi_q\left(\phi_p\left(u'\left(0\right)\right)-\lambda\int_0^s g\left(r\right)f\left(r,u\left(r\right)\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s-\lambda I_n\left(u\left(t_n\right)\right),\quad t_{n-1}<t\leqslant t_n.$$

接下来，对于 $t\in J$ 重复上面的过程，得到

$$u\left(t\right)=u\left(1\right)-\int_t^1\phi_q\left(\phi_p\left(u'\left(0\right)\right)-\lambda\int_0^s g\left(r\right)f\left(r,u\left(r\right)\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k\left(u\left(t_k\right)\right). \tag{6}$$

根据边界条件、式（3）与式（6）得

$$u'\left(0\right)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u'\left(\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\phi_q\left(\phi_p\left(u'\left(0\right)\right)-\lambda\int_0^{\xi_i}g\left(s\right)f\left(s,u\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\right) \tag{7}$$

而

$$u\left(1\right)=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u\left(\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(u\left(1\right)-\int_{\xi_i}^1\phi_q\left(\phi_p\left(u'\left(0\right)\right)-\lambda\int_0^s g\left(r\right)f\left(r,u\left(r\right)\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k\left(u\left(t_k\right)\right)\right). \tag{8}$$

再由式（8）可知

$$u\left(1\right)=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_{\xi_i}^1\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g\left(r\right)f\left(r,u\left(r\right)\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k\left(u\left(t_k\right)\right)\right)\right]. \tag{9}$$

令 $A_u=\phi_p\left(u'\left(0\right)\right)$，并且将式（6）代入到式（9）中可得

$$\begin{aligned}u\left(t\right)=&\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_{\xi_i}^1\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g\left(r\right)f\left(r,u\left(r\right)\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k\left(u\left(t_k\right)\right)\right)\right]-\\&\int_t^1\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g\left(r\right)f\left(r,u\left(r\right)\right)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k\left(u\left(t_k\right)\right),\end{aligned}$$

且 A_u 满足

$$\phi_q\left(A_u\right)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^{\xi_i}g\left(s\right)f\left(s,u\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\right).$$

引理 2 假设条件（H_1）～（H_3）成立，则存在唯一的 $A_u\in\left[-N\lambda\int_0^1 g\left(s\right)f\left(s,u\left(s\right)\right)\mathrm{d}s,0\right]$ 满足式（2），其中，

$$N=\frac{\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}.$$

首先定义 $H\left(A_u\right)$，有

$$H\left(A_u\right)=\phi_q\left(A_u\right)-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^{\xi_i}g(s)f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right).$$

可以看到，$H(0)\geqslant 0$. 接下来要证明存在唯一的 A_u，使得 $H\left(A_u\right)=0$.

首先，当 $H(0)=0$ 时，有

$$H(0)=\phi_q(0)-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\phi_q\left(0-\lambda\int_0^{\xi_i}g(s)f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right).$$

再由条件（H_2）立刻得出

$$\alpha_i\phi_q\left(-\lambda\int_0^{\xi_i}g(s)f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right)=0,$$

两边同时作用 ϕ_p，得

$$-\phi_p\left(\alpha_i\right)\lambda\int_0^{\xi_i}g(s)f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s=0.$$

因此有

$$\begin{aligned}H\left(A_u\right)&=\phi_q\left(A_u\right)-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^{\xi_i}g(s)f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right)\\&=\phi_q\left(A_u\right)-\sum_{i=1}^{m-2}\phi_q\left(\phi_p\left(\alpha_i\right)A_u-\phi_p\left(\alpha_i\right)\lambda\int_0^{\xi_i}g(s)f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right)\\&=\phi_q\left(A_u\right)-\sum_{i=1}^{m-2}\phi_q\left(\phi_p\left(\alpha_i\right)A_u\right)\\&=\phi_q\left(A_u\right)-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\phi_q\left(A_u\right)\\&=\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\right)\phi_q\left(A_u\right).\end{aligned}$$

显然 $A_u=0$ 时，$H\left(A_u\right)=0$.

其次，当 $H(0)>0$ 时，分两部分讨论：

1）当 $A_u\in(0,\infty)$,有

$$\begin{aligned}H\left(A_u\right)&=\phi_q\left(A_u\right)-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^{\xi_i}g(s)f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right)\\&\geqslant\phi_q\left(A_u\right)-\sum_{i=1}^{m-2}\phi_q\left(\phi_p\left(\alpha_i\right)A_u\right)\\&=\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\right)\phi_q\left(A_u\right)\\&>0.\end{aligned}$$

这说明当 $A_u>0$ 时，$H\left(A_u\right)>0$,无解。

2）当 $A_u\in(-\infty,0)$,因为 $H(0)>0$,所以有

$$\phi_q(0)-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\phi_q\left(0-\lambda\int_0^{\xi_i}g(s)f\left(s,u(s)\right)\mathrm{d}s\right)>0,$$

得出

$$\alpha_i \phi_q\left(\lambda \int_0^{\xi_i} g(s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s\right) > 0.$$

注意到

$$\begin{aligned} H(A_u) &= \phi_q(A_u) - \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \phi_q\left(A_u - \lambda \int_0^{\xi_i} g(s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s\right) \\ &= \phi_q(A_u)\left[1 - \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \phi_q\left(1 - \frac{\lambda \int_0^{\xi_i} g(s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s}{A_u}\right)\right] \\ &= \phi_q(A_u) \tilde{H}(A_u), \end{aligned}$$

其中，

$$\tilde{H}(A_u) = 1 - \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \phi_q\left(1 - \frac{\lambda \int_0^{\xi_i} g(s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s}{A_u}\right).$$

且 $\tilde{H}(A_u)$ 在 $(-\infty,0)$ 上严格递减。令 $\tilde{H}(A_u) > 0$,则有

$$\tilde{H}(A_u) = 1 - \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \phi_q\left(1 - \frac{\lambda \int_0^{\xi_i} g(s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s}{A_u}\right) > 0,$$

$$1 > \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \phi_q\left(1 - \frac{\lambda \int_0^{\xi_i} g(s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s}{A_u}\right),$$

$$1 > \phi_p\left(\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i\right)\left(1 - \frac{\lambda \int_0^{\xi_i} g(s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s}{A_u}\right),$$

$$1 > \phi_p\left(\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i\right)\left(1 - \frac{\lambda \int_0^{1} g(s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s}{A_u}\right).$$

可得

$$A_u \leqslant -N\lambda \int_0^1 g(s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s,$$

其中，

$$N = \frac{\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)}{1 - \phi_p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)}.$$

综上所述，当取 $A_u \leqslant -N\lambda \int_0^1 g(s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s$ 时，有 $\tilde{H}(A_u) > 0$. 此时 $H(A_u)\phi_q(A_u)\tilde{H}(A_u) < 0$，而当取 $A_u > 0$ 时，$H(A_u) > 0$；取 $A_u = 0$ 时，$H(A_u) = 0$. 又由于单调性与零点定理，推出存在唯一的 A_u 满足式（2）。

引理 3 假设条件（H_1）～（H_4）成立，则问题 1 的解 $u(t)$ 满足 $u(t)>0$，$u'(t)<0$，且有

$$\min_{t\in[0,1]} u(t) \geqslant \gamma \| u \|_{PC},$$

其中，

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i + \sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}{1+\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i}.$$

由引理 2 知，$A_u<0$，易得 $u(t)>0$ 且 $u'(t)<0$. 则对于任意 $t\in[0,1]$，有

$$\| u \|_{PC} = u(0), \min_{t\in[0,1]} u(t) = u(1),$$

且对于所有 $i\in[1,2,\cdots,m-2]$，有

$$\frac{u(0)-u(1)}{0-1} \geqslant \frac{u(\xi_i)-u(1)}{\xi_i-1},$$

即

$$\xi_i u(0) - \xi_i u(1) \leqslant u(\xi_i) - u(0),$$

推出

$$\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i u(0) - \sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i u(1) \leqslant u(1) - \sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(0),$$

$$u(0)\left(\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i + \sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\right) \leqslant u(1)\left(1+\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i\right).$$

得到

$$u(1) \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i + \sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}{1+\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i} u(0).$$

在 $PC[0,1]$ 中构造一个闭凸锥：

$$C = \left\{ u\in PC[0,1] : u \geqslant 0, \min_{t\in[\alpha,\beta]} u(t) > \gamma \| u \|_{PC} \right\},$$

其中，

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i + \sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}{1+\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\xi_i}.$$

定义一个算子 T 如下：

$$(Tu)(t) = \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_{\xi_i}^{1}\phi_q\left(A_u - \lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \lambda\sum_{t\leqslant t_k} I_k(u(t_k))\right)\right] -$$

$$\int_t^1 \phi_q\left(A_u - \lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \lambda\sum_{t\leqslant t_k} I_k(u(t_k)).$$

引理4 假设条件（H_1）～（H_4）成立，则$T:K\to K$是全连续算子。

由引理1与引理2易知$T(K)\subset K$. 下面证明T是一个全连续算子。首先，显然T是连续的。其次，根据条件（H_1）～（H_4），存在一个正数c使得任意$u\in PC[0,1]\cap C^2(J')$有

$$
\begin{aligned}
(Tu)(t)={}&\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_{\xi_i}^{1}\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))\right)\right]-\\
&\int_t^1\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))\\
\leqslant{}&\frac{2}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\int_0^1\phi_q\left(\frac{\lambda}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right]+\frac{2\lambda}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))\\
\leqslant{}&c.
\end{aligned}
$$

所以算子T一致有界。

另外，对于任意的$t_1,t_2\in J_k$，$t_1<t_2$有

$$
\begin{aligned}
\left|(Tu)(t_1)-(Tu)(t_2)\right|={}&\left|\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_{\xi_i}^{1}\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))\right)\right]-\right.\\
&\int_{t_1}^1\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))-\\
&\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_{\xi_i}^{1}\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))\right)\right]+\\
&\left.\int_{t_2}^1\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s-\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))\right|\\
\leqslant{}&\left|-\int_{t_1}^{t_2}\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right|\to 0,\ t_1\to t_2.
\end{aligned}
$$

这表明T是等度连续的。

根据Arzelà-Ascoli定理知$T:C\to C$全连续。

定义集合

$$\Omega_\rho=\left\{u\in C:\min_{t\in[0,1]}u(t)<\gamma\rho\right\}=\left\{u\in PC[0,1]:\gamma\|u\|_{PC}\leqslant\min_{t\in[0,1]}u(t)<\gamma\rho\right\},$$

其中，γ、ρ为变量。接下来的结论参见文献[6]。

引理5 Ω_ρ有如下性质：

1）Ω_ρ相对C是开集；

2）$C_{\gamma\rho}\subset\Omega_\rho\subset C_\rho=\{u\in C:\|u\|_{PC}<\rho\}$；

3） $u\in\partial\Omega_p$ 当且仅当 $\min\limits_{t\in[0,1]} u(t)=\gamma\rho$;

4）如果 $u\in\partial$,则有 $\gamma\leqslant\rho u(t)\leqslant\rho$，$t\in[0,1]$.

2 主要结论

首先记：

$$f^0=\lim_{u\to0^+}\sup\max_{t\in J}\frac{f(t,u)}{\phi(u)},\ f^\infty=\lim_{u\to\infty}\sup\max_{t\in J}\frac{f(t,u)}{\phi(u)},$$

$$f_0=\lim_{u\to0^+}\inf\max_{t\in J}\frac{f(t,u)}{\phi(u)},\ f_\infty=\lim_{u\to\infty}\inf\max_{t\in J}\frac{f(t,u)}{\phi(u)},$$

$$I^0(k)=\lim_{u\to0^+}\sup\max_{t\in J}\frac{I_k(t,u)}{u},\ I^\infty(k)=\lim_{u\to\infty}\sup\max_{t\in J}\frac{I_k(t,u)}{u},$$

$$I_0(k)=\lim_{u\to0^+}\inf\max_{t\in J}\frac{I_k(t,u)}{u},\ I_\infty(k)=\lim_{u\to\infty}\inf\max_{t\in J}\frac{I_k(t,u)}{u},$$

$$f_{\gamma\rho}^{\rho}=\min\left\{\min_{t\in J}\frac{f(t,u)}{\phi_p(\rho)}:u\in[\gamma\rho,\rho]\right\},\ f_0^\rho=\max\left\{\max_{t\in J}\frac{f(t,u)}{\phi_p(\rho)}:u\in[0,\rho]\right\},$$

$$I_0^\rho(k)=\max\left\{I_k(u):u\in[0,\rho]\right\},$$

$$\frac{1}{2m}=\frac{\lambda}{\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\right)\phi_q\left(1-\phi_p\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\right)}\phi_q\left(\int_0^1 g(r)\mathrm{d}r\right)+\frac{\lambda n}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i},$$

$$\frac{1}{2M}=\int_0^1\phi_q\left(\lambda\int_0^s g(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s.$$

定理 1 假设条件（H_1）～（H_4）和下面的条件成立：

（H_5）若 $f^0=0$，$I^0(k)=0$, 且 $f_\infty=\infty$，$I_\infty(k)=\infty$，$k=1,2,\cdots,n$，则对任意 $\lambda>0$, 问题 1 存在一个正解。

（H_6）若 $f_0=0$，$I_0(k)=0$，且 $f^\infty=\infty$，$I^\infty(k)=\infty$，$k=1,2,\cdots,n$，则对任意 $\lambda>0$, 问题 1 存在一个正解。

首先证明（H_5），（H_6）的证明方法与其类似。由条件可知，若

$$f^0=0,\ I^0(k)=0,$$

则存在 $l>0$ 与 $R>0$ 使得

$$f(t,u)<\phi_p(lu),\ I_k(t,u)<lu,\ \forall t\in J,\ 0\leqslant u\leqslant R,\ k=1,2,\cdots,m,$$

其中，l 满足关系

$$2l\left[\frac{\phi_q\left(\lambda\int_0^1 g(r)\mathrm{d}r\right)}{\left(1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\right)\phi_q\left(1-\phi_p\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\right)}+\frac{\lambda_n}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i}\right]\leqslant1.$$

那么对任意的 $u\in K\cap\partial\Omega_R$, 有

$$
\begin{aligned}
&(Tu)(t)\\
&=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_{\xi_i}^{1}\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))\right)\right]-\\
&\int_0^1\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))\\
&\leqslant\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_0^1\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))\right)\right]-\\
&\int_0^1\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))\\
&\leqslant\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_0^1\phi_q\left(-\frac{\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\lambda\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\right.\right.\\
&\left.\left.\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))\right)\right]-\int_0^1\phi_q\left(-\frac{\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\lambda\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\\
&\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))-\int_0^1\phi_q\left(-\frac{\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\lambda\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r-\lambda\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))\\
&\leqslant\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_0^1\phi_q\left(-\frac{\lambda}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right)\right]-\\
&\int_0^1\phi_q\left(-\frac{\lambda}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))\\
&\leqslant\frac{2-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\int_0^1\phi_q\left(\frac{\lambda}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right]+\frac{\lambda}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \frac{2}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\int_0^1 \phi_q\left(\frac{\lambda}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right]+\frac{2\lambda}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\sum_{t\leqslant t_k} I_k(u(t_k))$$

$$\leqslant \frac{2\|u\|_{PC}\, l\phi_q\left(\lambda\int_0^1 g(r)\mathrm{d}r\right)}{\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\right)\phi_q\left(1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\right)}+\frac{2\lambda}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\sum_{t\leqslant t_k}(l\|u\|_{PC})$$

$$\leqslant \frac{2\|u\|_{PC}\, l\phi_q\left(\lambda\int_0^1 g(r)\mathrm{d}r\right)}{\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\right)\phi_q\left(1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\right)}+\frac{2nl\lambda\|u\|_{PC}}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}$$

$$\leqslant 2l\|u\|_{PC}\left[\frac{\phi_q\left(\lambda\int_0^1 g(r)\mathrm{d}r\right)}{\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\right)\phi_q\left(1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\right)}+\frac{\lambda_n}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\right]$$

$=\|u\|_{PC}$，$u\in K\cap\partial\Omega_R$.

即有$\|T_\lambda u\|_{PC}\leqslant\|u\|_{PC}$.

再令 $f_\infty=\infty$，$I_\infty(k)=\infty$,则存在$l'>0$和$R'>R>0$使得

$$f(t,u)>\phi_p(l'u),\ I_k(t,u)>l'u,\ \forall t\in J,\ u\geqslant R',\ k=1,2,\cdots,m,$$

其中，l'满足

$$\gamma l'\left[\int_0^1\phi_q\left(\lambda\int_0^s g(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda n\right]\geqslant 1.$$

令$\delta=\dfrac{R'}{\gamma}$. 所以，当$u\in K\cap\partial\Omega_\delta$时，有

$$u(t)\geqslant\gamma\|u\|_{PC}=\delta\gamma=R',\ t\in J.$$

因此

$$(Tu)(t)=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_{\xi_i}^1\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))\right)\right]-$$

$$\int_0^1\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))$$

$$\geqslant-\int_0^1\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))$$

$$\geqslant\gamma l'\|u\|_{PC}\int_0^1\phi_q\left(\lambda\int_0^s g(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}l'\|u\|_{PC}$$

$$\geqslant\gamma l'\|u\|_{PC}\left[\int_0^1\phi_q\left(\lambda\int_0^s g(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\lambda n\right]$$

$$\geqslant\|u\|_{PC}.$$

这说明有

$$\|T_\lambda u\| \geqslant \|u\|_{PC}，\ \forall u \in K \cap \partial\Omega_\delta.$$

因此，对任意 $\lambda > 0$ 满足定理 1，说明算子 T_λ 在 $\bar{\Omega} \setminus \Omega_R$ 中存在一个不动点。

定理 2　假设条件（H_1）～（H_6）和下面的条件成立：

（H_7）存在 $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in (0, \infty)$，满足 $\rho_1 < \gamma\rho_2$，$\rho_2 < \rho_3$，使得

$$f_0^{\rho_1} < \phi_p(m)，I_0^{\rho_1}(k) < m\rho_1，f_{\gamma\rho_2}^{\rho_2} > \phi_p(M)，f_0^{\rho_3} < \phi_p(m)，I_0^{\rho_3}(k) < m\rho_3.$$

则问题 1 至少存在两个正解 u_1，u_2 满足：

$$u_1 \in \Omega_{\rho_2} \setminus \bar{K}_{\rho_1}，\ u_2 \in K_{\rho_2} \setminus \bar{\Omega}_{\rho_2}.$$

由条件（H_7）可知

$$\begin{aligned}
&(Tu)(t) \\
&= \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_{\xi_i}^1 \phi_q\left(A_u - \lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \lambda\sum_{t\leqslant t_k} I_k(u(t_k))\right)\right] - \\
&\int_0^1 \phi_q\left(A_u - \lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \lambda\sum_{t\leqslant t_k} I_k(u(t_k)) \\
&\leqslant \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_0^1 \phi_q\left(A_u - \lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \lambda\sum_{t\leqslant t_k} I_k(u(t_k))\right)\right] - \\
&\int_0^1 \phi_q\left(A_u - \lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \lambda\sum_{t\leqslant t_k} I_k(u(t_k)) \\
&\leqslant \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_0^1 \phi_q\left(-\frac{\phi_p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)}\lambda\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r - \lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \right.\right. \\
&\left.\left.\lambda\sum_{t\leqslant t_k} I_k(u(t_k))\right)\right] - \int_0^1 \phi_q\left(-\frac{\phi_p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)}\lambda\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r - \lambda\int_0^s g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \lambda\sum_{t\leqslant t_k} I_k(u(t_k)) \\
&\leqslant \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_0^1 \phi_q\left(-\frac{\phi_p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)}\lambda\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r - \lambda\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \right.\right. \\
&\left.\left.\lambda\sum_{t\leqslant t_k} I_k(u(t_k))\right)\right] - \int_0^1 \phi_q\left(-\frac{\phi_p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)}\lambda\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r - \lambda\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s + \lambda\sum_{t\leqslant t_k} I_k(u(t_k))
\end{aligned}$$

$$
\leqslant \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\left(-\int_0^1\phi_q\left(-\frac{\lambda}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right)\right]-
$$

$$
\int_0^1\phi_q\left(-\frac{\lambda}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\frac{\lambda}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))
$$

$$
\leqslant \frac{2-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\int_0^1\phi_q\left(\frac{\lambda}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right]+\frac{\lambda}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))+\lambda\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))
$$

$$
\leqslant \frac{2}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\left[\int_0^1\phi_q\left(\frac{\lambda}{1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)}\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right]+\frac{2\lambda}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))
$$

$$
\leqslant \frac{2\phi_q\left(\lambda\int_0^1 g(r)f(r,u(r))\mathrm{d}r\right)}{\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\right)\phi_q\left(1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\right)}+\frac{2\lambda}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\sum_{t\leqslant t_k}I_k(u(t_k))
$$

$$
\leqslant \frac{2m\rho_1\phi_q\left(\lambda\int_0^1 g(r)\mathrm{d}r\right)}{\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\right)\phi_q\left(1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\right)}+\frac{2nm\lambda\rho_1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}
$$

$$
\leqslant 2m\rho_1\left[\frac{\phi_q\left(\lambda\int_0^1 g(r)\mathrm{d}r\right)}{\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i\right)\phi_q\left(1-\phi_p\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\right)}+\frac{\lambda n}{1-\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i}\right]
$$

$=\rho_1$，$u\in\partial K_{\rho_1}$.

这表明，当 $u\in\partial K_{\rho_1},\|Tu\|_{PC}<\|u\|_{PC}$. 根据不动点定理可知

$$
i_k\left(T,K_{\rho_1}\right)=1.
$$

其次，证明 $i_k\left(T,\Omega_{\rho_2}\right)=0$.

令 $e(t)\equiv 1$. 则 $e\in\partial K_1$，有

$$
u\neq Tu+\eta e,\ u\in\partial\Omega_{\rho_2},\ \eta>0.
$$

反证法，若存在一个 $u_0\in\partial\Omega_{\rho_2}$ 和 $\eta_0>0$ 满足

$$
u_0\neq Tu_0+\eta_0 e,
$$

则当 $t\in[0,1]$ 时，由条件（H_7）知

$$
\begin{aligned}
u_0&=Tu_0+\eta_0 e\geqslant\gamma\,\|Tu_0\|_{PC}+\eta_0\\
&\geqslant 2\gamma\left[-\int_0^1\phi_q\left(A_u-\lambda\int_0^s g(r)f\big(r,u(r)\big)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right]+\eta_0\\
&\geqslant 2\gamma\left[\int_0^1\phi_q\left(\lambda\int_0^s g(r)f\big(r,u(r)\big)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right]+\eta_0\\
&\geqslant 2\gamma M\rho_2\left[\int_0^1\phi_q\left(\lambda\int_0^s g(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right]+\eta_0\\
&=\gamma\rho_2+\eta_0.
\end{aligned}
$$

这说明 $\gamma\rho_2>\gamma\rho_2+\eta_0$,与假设矛盾。因此，根据不动点定理知 $i_k\left(T,\Omega_{\rho_2}\right)=0$. 同理，可以证明 $i_k\left(T,K_{\rho_3}\right)=1$. 而 $\rho_1<\gamma\rho_2$,所以有 $\bar{K}_{\rho_1}\subset K_{\gamma\rho_2}\subset\Omega_{\rho_2}$. 再根据不动点定理 2 知存在两个正解。

[参考文献] (References)

[1] 张学梅，葛渭高. 带 p-Laplace 算子的奇异脉冲微分方程正解的存在性[J]. 数学的实践与认识，2008，38（21）：217-221. ZHANG X M, GE W G. Existence of positive solutions of impulsive singular differential equations with p-Laplacian[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2008, 38(21): 217-221. (in Chinese)

[2] JI D H, TIAN Y, GE W G. Positive solutions for one-dimensional p-Laplacian boundary value problems with sign changing nonlinearity[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009, 71(11): 5406-5416.

[3] MA D X, DU Z J, GE W G. Existence and iteration of monotone positive solutions for multipoint boundary value problem with p-Laplace operator[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005, 50(5-6): 729-739.

[4] ZHANG X M, GE W G. Impulsive boundary value problems involving the one-dimensional p-Laplacian[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009, 70(4): 1692-1701.

[5] ZHANG X M. Parameter dependence of positive solutions for second-order singular Neumann boundary value problems with impulsive effects[J]. Abstract and Applied Analysis, 2014(2): 1-6.

[6] FENG M Q, XIE D X. Multiple positive solutions of multi-point boundary value problem for second-order impulsive differential equations[J]. Journal of Computational Applied Mathematics, 2009, 223(1): 438-448.

（责任编辑：李曦）