

一种新的三角形识别方法

马世林, 牛英杰, 刘海涛, 刘杰

(辽宁工程技术大学理学院, 辽宁阜新 123000)

摘要: 为解决三角形识别准确率低的问题, 本文基于简单模糊模式和其改进简单模糊模式识别方法的缺点, 用三角形的边长关系构造了一种新的三角形识别方法, 定义了五种类型的隶属函数, 最后根据最大隶属度原则, 对三角形进行识别。实验结果表明, 新方法能准确对三角形进行识别, 确定其具体属于哪一类别, 识别准确率高, 并克服了其他识别方法的缺点, 具有很好的应用前景。

关键词: 模糊数学; 模糊模式识别; 三角形边长; 隶属函数; 最大隶属度原则

中图分类号: O159 文献标识码: A 文章编号: 1674-2850(2019)04-0545-07

A new triangle recognition method

MA Shilin, NIU Yingjie, LIU Haitao, LIU Jie

(School of Sciences, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning 123000, China)

Abstract: In order to solve the problem of low accuracy of triangle recognition, a new triangle recognition method is constructed by using the side length relationship of triangles, which is based on the shortcomings of the simple fuzzy mode and the improved simple fuzzy pattern recognition method in this paper. Five types of membership functions are defined and triangles are finally recognized according to the principle of the maximum membership degree. The experimental results show that the new method can accurately identify the triangle and determine which category it belongs to. The recognition accuracy is high, and the new method can overcome the shortcomings of other recognition methods, which has good application prospects.

Key words: fuzzy mathematics; fuzzy pattern recognition; side length of triangle; membership function; principle of the maximum membership degree

0 引言

为实现机器对事物的识别和分类, 人们最先研究让机器识别简单的几何图形。而三角形作为最简单的几何图形, 如何对三角形进行精确识别成为学者研究的重点。

1965年, 美国控制论专家 ZADEH^[1]发表了著名论文《Fuzzy sets》, 这标志着模糊数学的诞生, 其次还提出了模糊算法概念、模糊决策和模糊排序等。随后几十年模糊理论不断发展, 人们建立了模糊模式识别方法^[2], 其主要对没有明确外延的事物进行识别。在本文中, 主要介绍利用模糊模式识别方法来识别三角形的类型。2005年, 张雪^[3]用最小二乘法对不规则三角形进行直线拟合, 根据模糊分类判决法对三角形进行分类, 但存在许多弊端; 2008年, 孙晶^[4]为提高三角形的识别准确度, 改变了原有论域上的不足并改进了隶属函数, 提出了新的隶属函数, 改善并提高了识别的准确度, 但还是不能解决隶属度间区别不明显的弊端, 对等腰直角三角形进行识别时, 仍然会出现识别不准确的问题。2010年, 崔湘军等^[5]提出了指数型隶属度函数和阈值理论, 利用指数函数性质所求的隶属度差距较大, 区别明显, 便于识别。

作者简介: 马世林 (1997—), 男, 本科生, 主要研究方向: 应用数学

通信联系人: 刘海涛, 副教授, 主要研究方向: 机器学习. E-mail: haitao641@163.com

2018年,郭直清等^[6]很好地利用领域思想给出了三角形识别的隶属函数,使识别效果进一步增强,但对某些三角形进行识别时不能明确指出其具体属于哪一类型,使得用此方法研究实际问题时更加复杂。

针对上述方法的缺点,本文提出新的三角形识别方法,将仪器测量得到的三角形的三个内角用正弦定理^[7]化成其对应的边长,然后用边长关系构造五种类型的新隶属函数,最后根据最大隶属度原则^[8]对三角形进行识别,通过对比分析,本文新三角形识别方法有望解决简单模糊模式和其简单模糊模式识别方法对某些三角形识别不准确、准确率低的问题,对研究实际问题更有价值,应用范围更广。

1 模糊模式识别的基础理论知识

1.1 最大隶属原则

定义 X 为模糊集,其中集合元素分别为 $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n, i=1, 2, \dots, n$. 如果对 $\forall x_0 \in X$ 有 $\hat{A}_k(x_0) = \max\{\hat{A}_i(x_0)\}$, 则说明 x_0 相对隶属于模糊集 \hat{A}_k , 即是最大隶属原则。

1.2 隶属函数

定义 设 \hat{A} 为论域 X 的一个模糊子集,称 $\mu_{\hat{A}}(x): X \rightarrow [0, 1]$ 为 \hat{A} 的隶属函数。

作用: 这表明元素 x 符合模糊概念 \hat{A} 的“程度”。

2 模糊模式的三角形识别

将三角形大致分为五类,建立五个模糊模式: 直角三角形 \hat{R} 、等腰三角形 \hat{I} 、等边三角形 \hat{E} 、等腰直角三角形 \hat{IR} 、一般三角形 \hat{T} 。

2.1 简单模糊模式的三角形识别

利用简单模糊模式的识别方法对三角形进行识别,其步骤如下。

1) 设三角形的三个内角分别为 x, y, z , 建立识别特征因子集

$$U = \{(x, y, z) | x + y + z = 180^\circ, x \geq y \geq z\}.$$

2) 建立五个模糊模式的三角形隶属函数:

直角三角形隶属函数

$$\mu_{\hat{R}}(x, y, z) = 1 - \frac{|x - 90|}{90}, \quad (1)$$

等腰三角形隶属函数

$$\mu_{\hat{I}}(x, y, z) = 1 - \frac{\min\{x - y, y - z\}}{60}, \quad (2)$$

等边三角形隶属函数

$$\mu_{\hat{E}}(x, y, z) = 1 - \frac{\max\{x - y, y - z\}}{180}, \quad (3)$$

等腰直角三角形隶属函数

$$\mu_{\hat{IR}}(x, y, z) = \mu_{\hat{I}}(x, y, z) \wedge \mu_{\hat{R}}(x, y, z) = \min\{\mu_{\hat{I}}(x, y, z), \mu_{\hat{R}}(x, y, z)\}, \quad (4)$$

一般三角形隶属函数

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{T}}(x, y, z) &= \mu_{\hat{I}^c}(x, y, z) \wedge \mu_{\hat{R}^c}(x, y, z) \wedge \mu_{\hat{E}^c}(x, y, z) \\ &= [1 - \mu_{\hat{I}}(x, y, z)] \wedge [1 - \mu_{\hat{R}}(x, y, z)] \wedge [1 - \mu_{\hat{E}}(x, y, z)] \\ &= \min\{1 - \mu_{\hat{I}}(x, y, z), 1 - \mu_{\hat{R}}(x, y, z), 1 - \mu_{\hat{E}}(x, y, z)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

3) 用高精度角度测量器测得待识别三角形的三个内角分别为 x_0, y_0, z_0 ，将其分别代入上述五个隶属函数中得到相应的隶属度。

4) 根据最大隶属度原则，选择以上步骤中数据最大值所对应的类型，则认为待识别三角形就属于这一类型。

2.2 改进简单模糊模式的三角形识别

利用改进简单模糊模式对三角形进行识别，其步骤如下。

1) 设三角形的三个内角分别为 x, y, z ，建立识别特征因子集

$$U = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 180^\circ, x \geq y \geq z > 0\}.$$

2) 建立五个模糊模式三角形识别隶属函数：

直角三角形隶属函数

$$\mu_{\hat{R}}(x, y, z) = 1 - \frac{|x - 90|}{30}, \quad (6)$$

等腰三角形隶属函数

$$\mu_{\hat{I}}(x, y, z) = \max\left\{\frac{y}{x}, \frac{z}{y}\right\}, \quad (7)$$

等边三角形隶属函数

$$\mu_{\hat{E}}(x, y, z) = \min\left\{\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right\}, \quad (8)$$

等腰直角三角形隶属函数

$$\mu_{\hat{IR}}(x, y, z) = \mu_{\hat{I}}(x, y, z) \wedge \mu_{\hat{R}}(x, y, z) = \min\{\mu_{\hat{I}}(x, y, z), \mu_{\hat{R}}(x, y, z)\}, \quad (9)$$

一般三角形隶属函数

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{T}}(x, y, z) &= \mu_{\hat{I}^c}(x, y, z) \wedge \mu_{\hat{R}^c}(x, y, z) \wedge \mu_{\hat{E}^c}(x, y, z) \\ &= [1 - \mu_{\hat{I}}(x, y, z)] \wedge [1 - \mu_{\hat{R}}(x, y, z)] \wedge [1 - \mu_{\hat{E}}(x, y, z)] \\ &= \min\{1 - \mu_{\hat{I}}(x, y, z), 1 - \mu_{\hat{R}}(x, y, z), 1 - \mu_{\hat{E}}(x, y, z)\}. \end{aligned} \quad (10)$$

3) 用高精度角度测量器测得待识别三角形的三个内角分别为 x_0, y_0, z_0 ，将其分别代入上述五个隶属函数中得到相应的隶属度。

4) 根据最大隶属度原则，选择以上步骤中数据最大值所对应的类型，则认为待识别三角形就属于这一类型。

通过对上述两种三角形识别方法进行分析，其存在以下弊端：

1) 直接对信息进行取大取小使得信息丢失，从而导致识别不准确；

2) 对等腰三角形进行识别时，其隶属度总会小于或等于等腰三角形和直角三角形二者之一，从而出现识别错误的情况，识别准确率低。

针对上述弊端, 本文提出了一种新的模糊模式三角形识别方法。

3 新模糊模式三角形的识别方法

将三角形大致分为五类, 建立五个模糊模式: 直角三角形 \hat{R} 、等腰三角形 \hat{I} 、等边三角形 \hat{E} 、等腰直角三角形 \hat{IR} 、一般三角形 \hat{T} 。

3.1 该方法的实现步骤

1) 设三角形的三个内角分别为 x, y, z , 规定 $x \geq y \geq z$, 且 $x + y + z = 180^\circ$, 利用正弦定理将角转化为对应的边长, 即

$$a = 2R \sin x, \quad (11)$$

$$b = 2R \sin y, \quad (12)$$

$$c = 2R \sin z. \quad (13)$$

利用 Matlab 软件编程时需将角度制转换为弧度制。

建立识别特征因子集

$$U = \{(a, b, c) | b + c > a, b - c < a, a \geq b \geq c > 0\}.$$

2) 通过对不同类型的三角形特征进行分析, 建立其相应的隶属函数:

直角三角形隶属函数

$$\mu_{\hat{R}}(a, b, c) = \min \left\{ \frac{a^2}{b^2 + c^2}, \frac{c^2}{a^2 - b^2} \right\}, \quad (14)$$

等腰三角形隶属函数

$$\mu_{\hat{I}}(a, b, c) = \max \left\{ \frac{c}{b}, \frac{b}{a} \right\}, \quad (15)$$

等边三角形隶属函数

$$\mu_{\hat{E}}(a, b, c) = 1 - \max \left\{ \frac{a-b}{c}, \frac{b-c}{a} \right\}, \quad (16)$$

等腰直角三角形隶属函数

$$\mu_{\hat{IR}}(a, b, c) = \min \left\{ \frac{a^2}{b^2}, \frac{a^2}{c^2} \right\} - 1, \quad (17)$$

一般三角形隶属函数

$$\mu_{\hat{T}}(a, b, c) = \max \{ 1 - \mu_{\hat{I}}(a, b, c), 1 - \mu_{\hat{R}}(a, b, c), 1 - \mu_{\hat{E}}(a, b, c), 1 - \mu_{\hat{IR}}(a, b, c) \}. \quad (18)$$

3) 利用 Matlab 软件编写本方法的函数, 用高精度角度测量器测得待识别三角形的三个内角, 然后调用此函数, 就可以得到上述五个隶属函数中相应的隶属度。

4) 根据最大隶属度原则, 选择以上步骤中数据最大值所对应的类型, 则认为待识别三角形就属于这一类型。

3.2 构造原理

式 (14) 原理：直角三角形的边长关系满足 $a^2 = b^2 + c^2$ ，即 $\frac{a^2}{b^2 + c^2} = 1$ ， $\frac{c^2}{a^2 - b^2} = 1$ ，当二者中最小值都趋近于 1，那最大值也会趋近于 1，则说明待识别三角形近似为直角三角形。

式 (15) 原理：等腰三角形的边长关系满足 $a = b$ 或 $b = c$ ，即 $\frac{b}{a} = 1$ ， $\frac{c}{b} = 1$ ，当二者中任意一个值趋近于 1 即使其最大的值趋近于 1，则说明待识别三角形近似为等腰三角形。

式 (16) 原理：等边三角形的边长关系满足 $a = b = c$ ，即 $\frac{a-b}{c} = 0$ ， $\frac{b-c}{a} = 0$ ，当二者中最大值都趋近于 0，那最小值也会趋近于 0，要使其隶属度趋近于 1，就用 1 减去最大值，则说明待识别三角形近似为等边三角形。

式 (17) 原理：等腰直角三角形的边长关系满足 $a^2 = b^2 + c^2$ ， $b = c$ ，即 $\frac{a^2}{b^2} = 2$ ， $\frac{a^2}{c^2} = 2$ ，当二者中最小值都趋近于 2，那么最大值也会趋近于 2，要使其隶属度趋近于 1，就用二者最小值减去 1，则说明待识别三角形近似为等腰直角三角形。

式 (18) 原理：不是上述四种类型的三角形，就将其归纳为一般三角形，通过前期大量实验，用 1 分别减去上述四类三角形的隶属函数再取最大值作为一般三角形的隶属函数效果最佳。

4 数值实验

本文为能对任意三角形进行识别，用 Matlab 软件将三种方法编写成一个函数，当得知其三个内角时，调用此函数就可以分别得到三种方法中每种类型对应的隶属度。

为能更好地说明本文新模糊模式识别比简单模糊模式和改进简单模糊模式识别更好、准确率更高、应用更广，通过以下两个例题进行对比分析。

例 1：已知一个待识别三角形的三个内角分别为 71° ， 58° ， 51° 。

将三个角分别代入式 (1) ~ 式 (5) 可以得到简单模糊模式三角形识别方法对应的五种类型隶属度。

其次，将三个角分别代入式 (6) ~ 式 (10) 可以得到其改进简单模糊模式三角形识别方法对应的五种类型隶属度。

最后，将三个角分别代入式 (11) ~ 式 (13) 得到其对应的边长，再分别代入式 (14) ~ 式 (18) 可得到新三角形识别方法对应的五种类型隶属度。

结果如表 1 所示。

表 1 三种方法隶属度对比表 (例 1)

Tab. 1 Contrast table of membership degree of three methods (case 1)

类型	简单模糊模式	改进简单模糊模式	本文新模糊模式
直角三角形	0.788 9	0.366 7	0.675 7
等腰三角形	0.883 3	0.879 3	0.916 4
等边三角形	0.927 8	0.718 3	0.874 6
等腰直角三角形	0.788 9	0.366 7	0.243 1
一般三角形	0.072 2	0.120 7	0.756 9

由表 1 可知，根据最大隶属度原则，能够知道用简单模糊模式识别得到待识别三角形是等边三角形，

而用改进简单模糊模式和本文提出的新模糊模式识别得到待识别三角形是等腰三角形。直观上看,内角为 58° 和 51° 大致相等,认为其属于等腰三角形,所以后两种识别方法更接近于真实情况,识别准确率更高。

通过对简单模糊模式等边三角形和等腰三角形的隶属函数进行分析,任意给定一个三角形的三个内角,其等腰三角形的隶属度总会小于等边三角形的隶属度,则会对等腰三角形的识别出现错误,识别结果并不准确,本文的识别方法与改进简单模糊模式识别都避开了这一缺点,识别效果更好、更精确。

例 2: 已知一个待识别三角形的三个内角分别为 95° , 45° , 40° 。

算法同例 1, 结果如表 2 所示。

表 2 三种方法隶属度对比表 (例 2)

Tab. 2 Contrast table of membership degree of three methods (case 2)

类型	简单模糊模式	改进简单模糊模式	本文新模糊模式
直角三角形	0.944 4	0.833 3	0.839 1
等腰三角形	0.916 7	0.888 9	0.909 0
等边三角形	0.722 2	0.421 1	0.550 3
等腰直角三角形	0.916 7	0.833 3	0.984 8
一般三角形	0.055 6	0.111 1	0.449 7

由表 2 可知, 根据最大隶属度原则, 能够发现用简单模糊模式识别此三角形为直角三角形, 用改进简单模糊模式识别出来的为等腰三角形, 而用本文新模糊模式识别出来的为等腰直角三角形。通过对简单模糊模式和改进简单模糊模式的等腰直角三角形的隶属函数进行分析, 可知二者均存在取大取小的缺点, 导致等腰直角三角形的隶属度总会小于或等于直角三角形和等腰三角形二者其一的隶属度, 所以利用前两种模糊模式识别方法会对等腰直角三角形识别不准确, 而本文新方法在构造等腰直角三角形隶属函数时并未直接用取大取小, 而是根据其三个边长的关系进行构造, 能够避免因取大取小而导致的识别不准确。

5 结论

通过两个例题的分析, 本文提出的新模糊模式三角形识别具有以下优点: 1) 能够克服因取大取小对等腰直角三角形识别不准确的不足, 识别准确率明显提高, 效果更佳; 2) 在其他模糊模式识别方法失效的情况下, 依旧能对待识别三角形进行精准识别, 确定其具体属于哪一类, 不会出现有多种结果的情况, 稳定性更高; 3) 应用前景更广, 能为许多问题提供理论依据, 而且本文利用 Matlab 编写的函数易于操作理解, 对任意三角形只要调用此函数就能够得到其每种类型对应的隶属度。

[参考文献] (References)

- [1] ZADEH L.A. Fuzzy sets[J]. Information & Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] 陈星. 模糊模式识别法及 LVQ 神经网络在岩体质量分级中的应用研究[J]. 人民珠江, 2018, 39 (10): 1-6.
CHEN X. Application of fuzzy pattern recognition and LVQ neural network in the rock mass classification[J]. Pearl River, 2018, 39(10): 1-6. (in Chinese)
- [3] 张雪. 不规则三角形和四边形的模糊识别方法研究[J]. 机械科学与技术, 2005, 24 (10): 1145-1147.
ZHANG X. Fuzzy pattern recognition of irregular triangle and square[J]. Mechanical Science and Technology, 2005, 24(10): 1145-1147. (in Chinese)
- [4] 孙晶. 三角形的模糊模式识别 [EB/OL]. 北京: 中国科技论文在线 [2008-11-10].

- <http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/200811-223>.
SUN J. The triangular fuzzy pattern recognition[EB/OL]. Beijing: Sciencepaper Online[2008-11-10]. <http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/200811-223>. (in Chinese)
- [5] 崔湘军, 曹炳元. 三角形类型模糊模式识别新探[J]. 辽宁工程技术大学学报(自然科学版), 2010, 29(5): 978-981.
CUI X J, CAO B Y. Study on triangle type fuzzy pattern recognition[J]. Journal of Liaoning Technical University (Natural Science), 2010, 29(5): 978-981. (in Chinese)
- [6] 郭直清, 刘威, 刘海涛, 等. 基于模糊模式与邻域的三角形识别[EB/OL]. 北京: 中国科技论文在线[2018-08-03]. <http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/201808-13>.
GUO Z Q, LIU W, LIU H T, et al. Triangle recognition based on fuzzy pattern and neighborhood[EB/OL]. Beijing: Sciencepaper Online[2018-08-03]. <http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/201808-13>. (in Chinese)
- [7] 黄汉禹. 对正弦定理和余弦定理的研讨[J]. 数学通报, 2011, 50(6): 21-23, 26.
HUANG H Y. Discussion on sine theorem and cosine theorem[J]. Bulletin des Sciences Mathematics, 2011, 50(6): 21-23, 26. (in Chinese)
- [8] 朱小飞, 王永君, 李大军. 模糊评价中最大隶属度原则有效性检验[J]. 测绘与空间地理信息, 2016, 39(5): 135-137, 143.
ZHU X F, WANG Y J, LI D J. The effectiveness test of the maximum membership principle in fuzzy comprehensive evaluation[J]. Geomatics & Spatial Information Technology, 2016, 39(5): 135-137, 143. (in Chinese)

(责任编辑: 段桃)