

# 一类 SIRS 传染病模型的稳定性分析

吴长青<sup>1, 2</sup>, 朱长荣<sup>1</sup>

(1. 重庆大学数学与统计学院, 重庆 401331;  
2. 重庆市育才中学, 重庆 400050)

**摘要:** 以非线性发生率为条件, 选择在总人口不为常数的情况下, 研究一类 SIRS 传染病模型的解的有界性和平衡点稳定性, 包括无病平衡点的稳定性和地方病平衡点的局部稳定性。运用微分动力系统理论证明了无病平衡点在不同条件下是稳定结点、鞍点和退化平衡点。最后使用 Matlab 给出了系统在两个平衡点的主要相图, 从而进一步验证了本文理论的正确性。

**关键词:** 生物数学; 传染病模型; 局部稳定性; 退化平衡点; Matlab

**中图分类号:** Q141; O193      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1674-2850(2018)15-1514-06

## Stability analysis of a class of SIRS epidemic model

WU Changqing<sup>1, 2</sup>, ZHU Changrong<sup>1</sup>

(1. College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China;  
2. Chongqing Yucai Secondary School, Chongqing 400050, China)

**Abstract:** Under the condition of nonlinear incidence and with the situation that the total population is not constant, the boundedness and equilibrium stability of the solution of an SIRS epidemic model are studied, including the stability of disease-free equilibrium and the local stability of endemic disease equilibrium. Using the theory of differential dynamic system, it is proved that the disease-free equilibrium can be the stable, saddle, and degenerate equilibrium node. Finally, the main phase diagram of the system in the two equilibriums is obtained by Matlab, furthermore the correctness of the theory is verified.

**Key words:** biomathematics; epidemic model; local stability; degenerate equilibrium; Matlab

## 0 引言

传染病模型是微分动力系统的一个重要组成部分, 也是数学与生物学交叉结合的产物之一, 因此数学模型在研究控制传染病的传播过程中已成为一个非常重要的数学工具。从 KERMACK 等<sup>[1]</sup>提出的经典传染病模型开始, 研究引入了简单的发生率  $kSI$  ( $k$  为一个比例系数;  $S$ 、 $I$  分别为易感者、感染者)。1978 年, CAPASSO 和 SERIO 研究了以  $g(I) = kI / (1 + \alpha I)$  ( $\alpha$  为一个与接触率有关的参数) 为发生率的传染病模型<sup>[2]</sup>。后来, LIU 等<sup>[3]</sup>研究了更一般的发生率  $kSI^P / (1 + \alpha I^q)$  ( $P$ 、 $q$  为常数), 也有学者研究了以  $kSI / (1 + \alpha I^2)$ <sup>[4]</sup> 为发生率的 SIRS 模型。但对于绝大部分的模型来说, 它们都是在总人口规模为常数, 即  $S + I + R = N$  ( $R$  为移除者;  $N$  为常数) 的假设前提下, 研究模型的理论性态。而在实际生活中却又很难满足总人口规模不变的假设, 因为对于某些疾病来说, 它的影响时间比较长。例如“黑死病”在欧洲存在了近三百年, 它的存在时间尺度大于人的生存死亡尺度, 这时如果依然采用固定人口规模的模型就显得有些不切实际。因此, 在去掉这一假设前提下的研究工作就显得尤其重要。另一方面, 针对模型系统本身, 是否会因降

**基金项目:** 国家自然科学基金 (11671058)

**作者简介:** 吴长青 (1992—), 男, 硕士, 主要研究方向: 微分方程与动力系统

**通信联系人:** 朱长荣, 教授, 主要研究方向: 微分方程与动力系统. E-mail: zhuchangrong126@126.com

阶后的处理而影响或改变系统本身的性态？这一问题在本文中也可以得到解决。

为此，本文基于文献[4]中以  $kSI/(1+\alpha I^2)$  为发生率的传染病模型进行了详细的讨论。

$$\begin{aligned} S' &= b - dS - \frac{kSI}{1+\alpha I^2} + \gamma R, \\ I' &= \frac{kSI}{1+\alpha I^2} - (d+\mu)I, \\ R' &= \mu I - (d+\gamma)R, \end{aligned} \quad (1)$$

其中， $S'$ 、 $I'$ 、 $R'$  分别为  $S$ 、 $I$ 、 $R$  的导数； $b$  为人口出生率； $d$  为自然死亡率； $\gamma$  为移除者失去免疫力再次成为易感者的占有比率； $\mu$  为感染者的自然恢复率。

以往的研究主要在平面  $S+I+R=N$  ( $N$  为常数) 的基础上研究系统的稳定性态，即将原三维系统降阶到二维上处理，得到一些很好的结论。本文与之不同之处在于，在省去这一假设的前提下，从模型本身的角度去研究模型到底存在哪些固有的性态，这也是本文的一个创新之处。

## 1 传染病模型

为求出系统 (1) 的平衡点，可以列出如下方程：

$$\begin{aligned} b - dS - \frac{kSI}{1+\alpha I^2} + \gamma R &= 0, \\ \frac{kSI}{1+\alpha I^2} - (d+\mu)I &= 0, \\ \mu I - (d+\gamma)R &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

由式 (2) 可以看出，对于任意参数，系统都存在无病平衡点  $E_0 = (\frac{b}{d}, 0, 0)$ 。同时，当  $I \neq 0$  时，还存在正平衡点，联立式 (2) 可得

$$\alpha d(d+\mu)I^2 + k\left(d+\mu - \frac{\gamma\mu}{d+\gamma}\right)I + d(d+\mu) - kb = 0, \quad (3)$$

从而可以得到该系统的基本再生数

$$R_0 = \frac{kb}{d(d+\mu)}. \quad (4)$$

结合式 (3) 和式 (4) 不难看出，当  $R_0 \leq 1$  时，系统 (1) 只存在无病平衡点；而当  $R_0 > 1$  时，系统 (1) 除无病平衡点外，还存在正平衡点，即地方病平衡点  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$ 。由式 (2) 可以求出

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{b - mI^*}{d}, \\ I^* &= \frac{-km + \sqrt{k^2m^2 - 4\alpha d(d+\mu)(d^2 + d\mu - kb)}}{2\alpha d(d+\mu)}, \\ R^* &= \frac{\mu}{d+\gamma}I^*, \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $m = \frac{d(d+\mu+\gamma)}{d+\gamma}$ .

以上是对系统(1)平衡点的一个归纳。下面将对这两个平衡点的稳定性进行讨论。

## 2 解的有界性与平衡点的稳定性

### 2.1 解的有界性

**定理 1** 系统(1)中的所有解曲线都有界。

证明: 下面将分两种情况对该定理进行证明, 将式(2)中3个方程相加, 可得

$$\frac{dN}{dt} = b - dN. \quad (6)$$

1) 如果初值  $N(t_0) > \frac{b}{d}$ , 则对方程(6)存在时间  $T_1$ , 使得当  $t \in (t_0, T_1)$  时有  $\frac{dN}{dt} < 0$ , 即  $N(t)$  是关于时间  $t$  的单调递减函数, 因此有  $N(t) < N(t_0)$ ;

2) 如果初值  $N(t_0) < \frac{b}{d}$ , 同样对方程(6)存在时间  $T_2$ , 使得当  $t \in (t_0, T_2)$  时有  $\frac{dN}{dt} > 0$ , 即  $N(t)$  是关于时间  $t$  的单调递增函数, 因此有  $N(t) > N(t_0)$ .

如果  $N(t) > N(t_0)$ , 则其结论与1)相同。

### 2.2 平衡点的稳定性

本文考虑的系统平衡点的稳定性不单是在平面  $S + I + R = \frac{b}{d}$  上, 而是在整个空间  $\mathbb{R}^3$  中的第一卦象内讨论。这里也不会对系统(1)进行平移变换, 而将从模型本身出发去研究系统在平衡点处的稳定性。

系统(1)在平衡点的线性化系统的线性化矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -d - \frac{kI}{1+\alpha I^2} & \frac{kS(1-\alpha I^2)}{(1+\alpha I^2)^2} & \gamma \\ \frac{kI}{1+\alpha I^2} & \frac{kS(1-\alpha I^2)}{(1+\alpha I^2)^2} - (d+\mu) & 0 \\ 0 & \mu & -(d+\gamma) \end{bmatrix},$$

其对应在无病平衡点  $E_0 = (\frac{b}{d}, 0, 0)$  的线性化矩阵为

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} -d & -\frac{kb}{d} & \gamma \\ 0 & \frac{kb}{d} - (d+\mu) & 0 \\ 0 & \mu & -(d+\gamma) \end{bmatrix}.$$

可以看出, 如果  $R_0 < 1$ , 矩阵  $\mathbf{M}_0$  有3个负特征根, 由微分方程定性理论<sup>[5]</sup>可知, 此时无病平衡点是稳定

的结点; 如果  $R_0 > 1$ , 则有  $\det(\mathbf{M}_0) > 1$ , 此时的无病平衡点是不稳定的。由分岔理论知识可知, 系统在  $R_0 = 1$  处将发生鞍-结分岔。

设  $A = \max\{N(t_0), \frac{b}{d}\}$ , 由定理 1 解的有界性可知, 对系统 (1) 中的任意解  $N(t)$ , 都有  $N(t) \leq A$ , 这种情况下, 由 Dulac 函数<sup>[4]</sup>可知, 此时平衡点  $E_0$  是全局渐进稳定的。总结得出以下定理。

**定理 2** 系统 (1) 在无病平衡点  $E_0 = (\frac{b}{d}, 0, 0)$  的稳定性存在以下 3 种可能:

- 1) 如果  $R_0 < 1$ , 则  $E_0$  是系统的稳定结点;
- 2) 如果  $R_0 > 1$ , 则  $E_0$  是系统的鞍点;
- 3) 如果  $R_0 = 1$ , 则  $E_0$  是系统的鞍-结点。

下面将讨论当  $R_0 > 1$  时, 地方病平衡点  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$  的局部稳定性。当  $I \neq 0$  时, 由式 (2) 中的第二个方程可得  $\frac{kS^*}{1+\alpha I^2} = d + \mu$ . 系统 (1) 在地方病平衡点  $E^*$  处的线性化矩阵为

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} -d - \frac{kI^*}{1+\alpha(I^*)^2} & -\frac{(d+\mu)[1-\alpha(I^*)^2]}{1+\alpha I^{*2}} & \gamma \\ \frac{kI^*}{1+\alpha(I^*)^2} & \frac{(d+\mu)[1-\alpha(I^*)^2]}{1+\alpha(I^*)^2} - (d+\mu) & 0 \\ 0 & \mu & -(d+\gamma) \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M}_1) &= [\mu\gamma - (d+\mu)(d+\gamma)] \left[ \frac{kI^*}{1+\alpha(I^*)^2} + d \right] - d\mu\gamma + \frac{\alpha d(d+\mu)(d+\gamma)(I^*)^2}{1+\alpha(I^*)^2} \\ &= -\frac{I^*}{1+\alpha(I^*)^2} [2\alpha(d^2 + d\mu + d\gamma + \mu\gamma)I^* + k(\alpha + d + \mu)], \end{aligned} \quad (7)$$

不难看出  $\det(\mathbf{M}_1) < 0$ . 因此, 矩阵  $\mathbf{M}_1$  的特征根符号有两种情况:  $(-, +, +)$  或  $(-, -, -)$ . 也就是说, 平衡点  $E^*$  要么是稳定的结点, 要么是不稳定的鞍点。为此还需做进一步判断, 这个可以用 Routh-Hurwitz 判定准则<sup>[6]</sup>进行推理论证, 下面给出判定平衡点  $E^*$  的稳定性定理。

**定理 3** 如果  $R_0 > 1$ , 则平衡点  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$  是系统 (1) 的唯一稳定结点。

证明: 以上推断了  $\det(\mathbf{M}_1) < 0$ , 计算  $\mathbf{M}_1$  的迹为

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{M}_1) &= \frac{(d+\mu)[1-\alpha(I^*)^2]}{1+\alpha(I^*)^2} - \frac{kI^*}{1+\alpha(I^*)^2} - (3d + \mu + \gamma) \\ &= -\frac{1}{1+\alpha(I^*)^2} [\alpha(4d + 2\mu + \gamma)(I^*)^2 + kI^* + (3d + \mu + \gamma)]. \end{aligned} \quad (8)$$

因此, 有  $\text{tr}(\mathbf{M}_1) < 0$ . 同时计算出

$$\Psi(\mathbf{M}_1) = (2d^2 + 2d\mu + d\gamma + \mu\gamma) \frac{2\alpha(I^*)^2}{1+\alpha(I^*)^2} + (2d + \mu + \gamma) \frac{kI^*}{1+\alpha(I^*)^2} + d(d + \gamma). \quad (9)$$

由方程 (7) ~ 方程 (9) 可得

$$\Psi(M_1) \times \text{tr}(M_1) < \det(M_1).$$

因此, 由 Routh-Hurwitz 定理可以推出平衡点  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$  是局部渐进稳定的, 它是稳定结点。

### 3 系统的相图

本节将用数学软件 Matlab 进行试验, 以验证本文结论的正确性。

如图 1~图 4 所示, 分别显示当  $b=1$ 、 $d=0.4$ 、 $k=0.2$ 、 $\alpha=4$ 、 $\gamma=0.3$ 、 $\mu=0.2$ 、 $R_0 = \frac{5}{6} < 1$  时, 系统(1)

在平衡点  $E_0 = (2.45, 0, 0)$  附近所对应的易感者、感染者和移除者关于时间的函数图像及 SIR 相图。

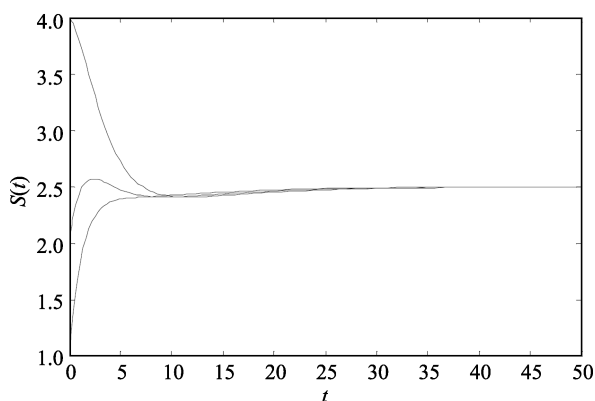


图 1  $R_0 < 1$  时易感者的变化趋势

Fig. 1 Trend of susceptible individuals at  $R_0 < 1$

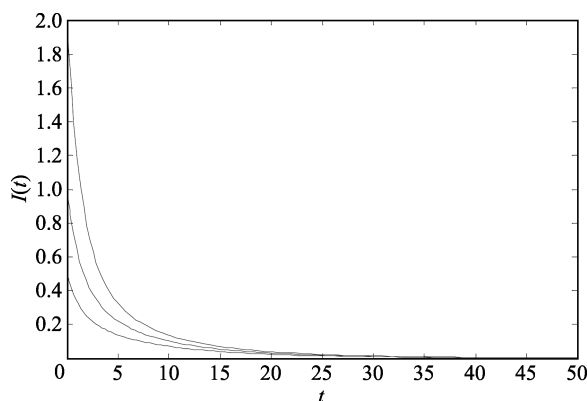


图 2  $R_0 < 1$  时感染者的变化趋势

Fig. 2 Trend of infective individuals at  $R_0 < 1$

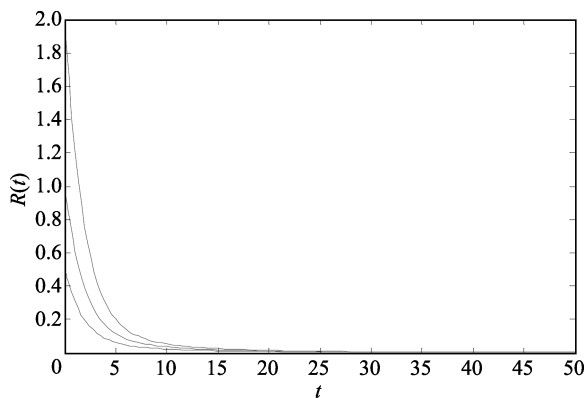


图 3  $R_0 < 1$  时移除者的变化趋势

Fig. 3 Trend of removed individuals at  $R_0 < 1$

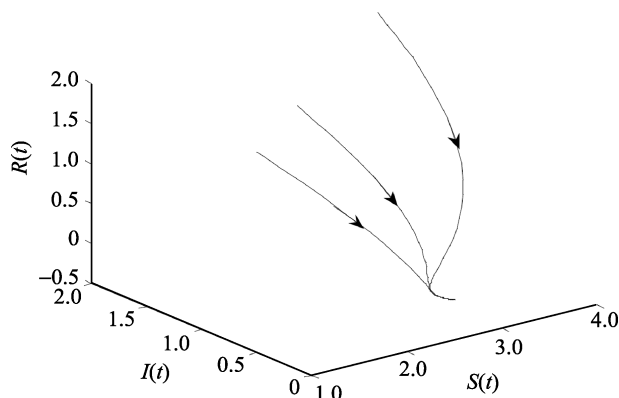


图 4  $R_0 < 1$  时的 SIR 相图

Fig. 4 Phase diagram of SIR at  $R_0 < 1$

如图 5~图 7 所示, 分别显示当  $b=2$ 、 $d=0.2$ 、 $k=0.6$ 、 $\alpha=4$ 、 $\gamma=0.3$ 、 $\mu=0.1$ 、 $R_0 = 20 > 1$  时, 系统(1)在平衡点  $E^* = (7.72, 1.90, 0.38)$  附近所对应的易感者、感染者和移除者关于时间的函数图像。

### 4 结论

总结定理 1~定理 3, 系统 (1) 的稳定性结论如下。

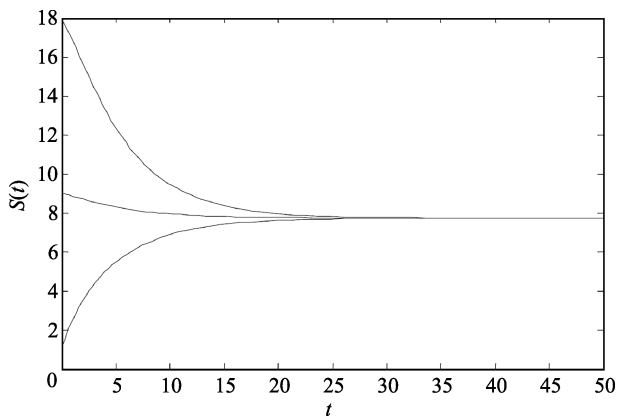


图 5  $R_0 > 1$  时易感者的变化趋势

Fig. 5 Trend of susceptible individuals at  $R_0 > 1$

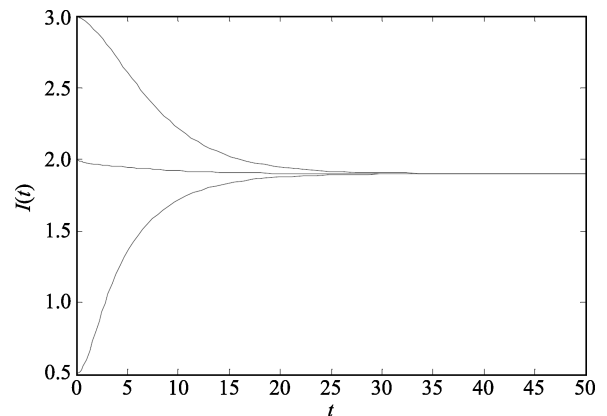


图 6  $R_0 > 1$  时感染者的变化趋势

Fig. 6 Trend of infective individuals at  $R_0 > 1$

**定理 4** 关于系统 (1) 的稳定性存在以下三个结论:

1) 如果基本再生数  $R_0 < 1$ , 则系统 (1) 只存在无病平衡点  $E_0 = (\frac{b}{d}, 0, 0)$ , 并且是全局渐进稳定的;

2) 如果基本再生数  $R_0 > 1$ , 则系统 (1) 存在无病平衡点  $E_0 = (\frac{b}{d}, 0, 0)$  和地方病平衡点  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$ , 且  $E^*$  是局部渐进稳定的;

3) 如果基本再生数  $R_0 = 1$ , 则系统 (1) 只存在无病平衡点  $E_0 = (\frac{b}{d}, 0, 0)$ , 此时该点是一个极不稳定的鞍-结点。

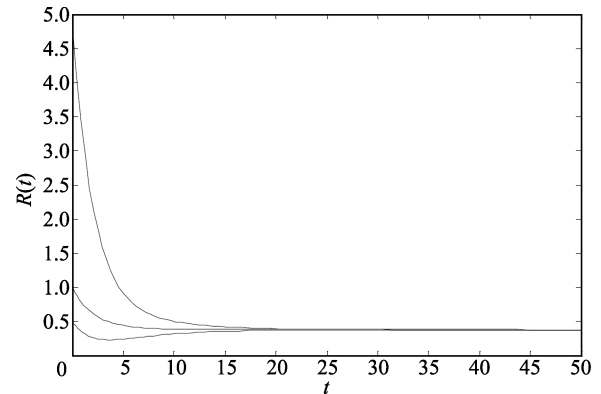


图 7  $R_0 > 1$  时移除者的变化趋势

Fig. 7 Trend of removed individuals at  $R_0 > 1$

[参考文献] (References)

[1] KERMACK W O, McKENDRICK A G. A contribution to the mathematical theory of epidemics[J]. Proc. Roy. Soc., 1927, 115(772): 700-721.

[2] BRAUER F, CASTILLO-CHAVEZ C. Mathematical models in population biology and epidemiology[M]. New York: Springer, 2012.

[3] LIU W M, HETHCOTE H W, LEVIN S A. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates[J]. J. Math. Biol., 1987, 25(4): 359-380.

[4] XIAO D M, RUAN S G. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate[J]. Math. Biosci., 2007, 208(2): 419-429.

[5] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2000.  
ZHANG J Y, FENG B Y. Geometric theory and branch problems of ordinary differential equations[M]. 2nd ed. Beijing: Peking University Press, 2000. (in Chinese)

[6] ZHU H P, CAMPBELL S A, WOLKOWICZ G S K. Bifurcation analysis of a predator-prey system with nonmonotonic functional response[J]. SIAM J. Appl. Math., 2002, 63(2): 636-682.