对流扩散反应问题的迎风有限体积元方法的后验误差估计

刘　晓，毕春加

（烟台大学数学与信息科学学院，山东烟台　264005）

摘要：有限体积元方法格式构造简单，并且能保持数值流量的局部守恒性。研究对流扩散反应问题基于 Crouzeix-Raviart 非协调元的迎风有限体积元方法的逼近误差在 H^1 范数意义下的后验误差估计，主要参考对流扩散反应方程基于协调元的具有迎风格式和基于非协调元的不具迎风格式的有限体积元方法的后验误差估计方法，运用迎风格式处理对流项，得到了逼近误差在 H^1 范数意义下的后验误差估计整体上界。

关键词：计算数学；对流扩散反应方程；有限体积元方法；Crouzeix-Raviart 非协调元；后验误差估计

中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1674-2850(2017)07-0709-09

A posteriori error estimate of finite volume elements method with upwind scheme for convection-diffusion-reaction problem

LIU Xiao, BI Chunjia

(*School of Mathematics and Information Sciences*, *Yantai University*, *Yantai*, *Shandong* 264005, *China*)

Abstract: The finite volume element structure is simple, and it keeps the local conservativeness of the numerical flow. The main purpose of this paper is to give posteriori H^1 error estimate for Crouzeix-Raviart nonconforming finite volume element method with upwind scheme for convection-diffusion-reaction problem. The main reference is the calculation method of the upwind scheme based on the conforming finite element and the scheme without upwind based on Crouzeix-Raviart nonconforming finite volume element. Using the upwind scheme to treat the convection term, finally, we get the global upper bound of the posteriori error estimator in the H^1 norm.

Key words: computational mathematics; convection-diffusion-reaction equations; finite volume element method; Crouzeix-Raviart nonconforming element; posteriori error estimate

0　引言

对流扩散方程是材料运输的物理过程和分子扩散及黏性流体流动的数学模型，可以被用来描述河流污染、空气污染、核污染等污染物在流体流动和传热的分布流体现象。对流占优扩散方程中对流项系数远远大于扩散项系数。在数值计算中，对流项的处理比较困难，处理不当就会导致数值计算结果误差较大。

有限体积元方法和有限元方法具有处理复杂求解区域和高阶逼近精度的优点。另外，有限体积元方法能够使求解的离散问题在每个对偶单元上保持局部守恒性。这种局部守恒性使得有限体积元方法在流

基金项目：国家自然科学基金（11571297）

作者简介：刘晓（1991—），女，硕士研究生，主要研究方向：有限体积元方法及有限元方法等

通信联系人：毕春加，教授，主要研究方向：有限体积元方法及有限元方法等. E-mail: chunjiabi@126.com

体力学、热传导方程和地质学等领域获得广泛应用。

近年来，有限体积元方法受到广泛关注，并取得许多研究成果。CHOU 等[1]研究了椭圆和抛物问题的有限体积元方法的误差估计；AFIF 等[2]和 BERGAM 等[3]分别研究了线性和非线性扩散问题的有限体积元方法基于残量的后验误差估计；运用平均技巧，CARSTENSEN 等[4]建立了关于一般二阶椭圆问题的有限体积元方法的误差估计子；OHLBERGER[5]研究了关于标量非线性时间依赖对流扩散反应问题的一个 L^2 范数意义下的后验误差估计子；NICAISE[6~7]建立了关于单元中心有限体积元方法的 Morley 型插值逼近的后验误差估计；VOHRELÍK[8]对局部后处理有限体积元逼近的后验误差估计子进行了研究；BI 等[9]研究了基于非协调元的先验估计；CHATZIPANTELIDIS 等[10]研究了关于稳定的 Stokes 问题的后验误差估计；YANG[11]研究了二阶椭圆问题基于非协调元的有限体积元方法的后验误差估计。

在上述文献中，除文献[9]和文献[11]研究了基于非协调元的误差估计，其他文献都是基于协调元的。本文主要研究对流扩散反应方程基于 Crouzeix-Raviart 元的有限体积元方法，参考对流扩散反应方程基于协调元的具有迎风格式[4]和基于非协调元的不具迎风格式[11]的有限体积元方法的后验误差估计计算方法，采用迎风格式处理对流项，计算逼近误差在 H^1 范数意义下的后验误差估计整体上界。

1 预备知识

考虑如下对流扩散反应问题：求 $u=u(x)$，使得

$$\begin{cases}-\nabla\cdot\left(\boldsymbol{A}\nabla u\right)+\nabla\cdot(bu)+cu=f，\quad x\in\Omega;\\ u=0，\quad x\in\partial\Omega;\end{cases} \tag{1}$$

其中，$\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 为多边形区域；$\boldsymbol{A}(x)\in C^1\left(\Omega;\mathbb{R}^{2\times 2}\right)$ 为对称正定矩阵；$b(x)\in\left(C^1(\Omega)\right)^2$、$c(x)\in L^\infty(\Omega)$ 和 $f(x)\in L^2(\Omega)$ 为给定函数。

分别用 $\|\cdot\|_{m,G}$ 和 $|\cdot|_{m,G}$ 表示 Sobolev 空间 $H^m(G)$ 的范数和半范，$H_0^1(G)$ 为 $H^1(G)$ 的子空间，在边界 ∂G 上为 0. 当 $G=\Omega$ 时，$\|\cdot\|_{m,G}=\|\cdot\|_m$，$|\cdot|_{m,G}=|\cdot|_m$. 为避免未知常数的出现，用符号 $a\lesssim b$ 代替不等式 $a\leqslant Cb$，这里的常数 C 与网格尺寸 h 无关。

方程（1）的弱形式是求 $u\in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$a(u,v)=(f,v)，\quad\forall v\in H_0^1(\Omega), \tag{2}$$

其中，双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 定义在 $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 上，

$$a(u,v)=(\boldsymbol{A}\nabla u-bu,\nabla v)+(cu,v).$$

进一步假设

$$c(x)+\frac{1}{2}\nabla\cdot b(x)\geqslant 0，\quad\forall x\in\Omega. \tag{3}$$

假设问题（1）的系数满足如下两个性质：

1）正定性。即存在一个常数 $c_0>0$，使得

$$c_0\|u\|_1^2\leqslant a(u,u),\quad\forall u\in H_0^1(\Omega). \tag{4}$$

2）有界性。即存在一个常数 $c_1>0$，使得

$$a(u,v)\leqslant c_1\|u\|_1\|v\|_1，\quad\forall u,v\in H_0^1(\Omega). \tag{5}$$

令 $\mathcal{T}_h=\{K\}$ 为 Ω 中拟一致三角剖分，这里 $h=\max h_K$，h_K 为三角形单元 K 的直径。对于 $K\in\mathcal{T}_h$，分别用 $\mathcal{E}(K)$ 和 $\mathcal{N}(K)$ 表示单元 K 的边和中点的集合，并且令

$$\mathcal{E}_h=\bigcup_{K\in\mathcal{T}_h}\mathcal{E}(K),\quad \mathcal{N}_h=\bigcup_{K\in\mathcal{T}_h}\mathcal{N}(K).$$

令 $\mathcal{E}_h^0$ 为所有内边的集合。对任意 $E\in\mathcal{E}_h$，分别用 h_E 和 m_E 表示它的直径和中点。对于 $K\in\mathcal{T}_h$ 和 $E\in\mathcal{E}_h$，定义

$$\tilde{\omega}_K=\bigcup_{\mathcal{N}(K)\cap\mathcal{N}(K')\neq\varnothing}K',\quad \tilde{\omega}_E=\bigcup_{\mathcal{N}(E)\cap\mathcal{N}(K')\neq\varnothing}K'.$$

对于 $E=\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}(K')$，定义分片函数 v 的跳跃为

$$[v]_E=v|_{K'}-v|_K.$$

相似的符号也用于向量函数。

定义关于三角剖分 $\mathcal{T}_h$ 的空间 $H^1(\mathcal{T}_h)$ 为

$$H^1(\mathcal{T}_h)=\{v\in L^2(\Omega):v|_K\in H^1(K),\ \forall K\in\mathcal{T}_h\}.$$

定义在 $H^1(\mathcal{T}_h)$ 上的 H^1 半范和范数分别为

$$|v|_{1,h}=(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}|v|_{1,K}^2)^{1/2},\quad \|v\|_{1,h}=(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|v\|_{1,K}^2)^{1/2}.$$

对于 $v\in H^1(\mathcal{T}_h)$，用 $\nabla_h v$ 表示关于 $\mathcal{T}_h$ 的梯度算子，即

$$\nabla_h v|_K=\nabla v|_K.$$

令 $\tilde{V}_h^{\mathrm{nc}}\subset H^1(\mathcal{T}_h)$ 为 Crouzeix-Raviart[11]非协调有限元空间，即对任意 $v\in\tilde{V}_h^{\mathrm{nc}}$ 和 $K\in\mathcal{T}_h$，$v|_K$ 为线性的且在单元边界中点连续。令

$$V_h^{\mathrm{nc}}=\{v\in\tilde{V}_h^{\mathrm{nc}}:v(m_E)=0,\ \forall E\in\partial\Omega\},$$

定义 P_1 协调有限元空间为

$$V_h^{\mathrm{c}}=\{v\in C(\Omega):v|_K\ \text{是线性的},\ \forall K\in\mathcal{T}_h;v|_{\partial\Omega}=0\}.$$

可知

$$V_h^{\mathrm{c}}\subset V_h^{\mathrm{nc}}.$$

运用如下方法构造对偶剖分 $\mathcal{T}_h^*$：令 z_k 为 $K\in\mathcal{T}_h$ 的任意内点，其中 z_k 的选择不影响 H^1 范数意义下的误差分析。用线段分别连接 z_k 与单元 K 的顶点，则单元 K 被剖分成三个子三角形 K_E，$E\in\mathcal{E}(K)$，对每个边 $E\in\mathcal{E}_h^0$，用 K_E^* 表示具有共同边 E 的子区域 K_E 的并集，则得到一族覆盖区域 Ω 的有限体，即得对偶剖分 $\mathcal{T}_h^*$.

2 有限体积元方法

给定一个边 $E\in\mathcal{E}_h^0$，在方程（1）两边关于 K_E^* 积分，应用格林公式得到

$$\int_{\partial K_E^*}(-\boldsymbol{A}\nabla u+bu)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s+\int_{K_E^*}cu\mathrm{d}x=\int_{K_E^*}f\mathrm{d}x, \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 为 K_E^* 的单位外法线向量。

定义插值算子 $I_h^*:V_h^{\mathrm{nc}}\to V_h^*$，使得

$$I_h^* v=\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0} v(m_E)\Psi_E,$$

其中，$V_h^*=\{v\in L^2(\Omega): v|_{K_E^*}$ 为一个常数,$\forall E\in\mathcal{E}_h^0; v|_{K_E^*}=0,\forall E\in\partial\Omega\}$，并且 Ψ_E 为控制体 K_E^* 上的特征函数。

对于任意 $v_h\in V_h^{\mathrm{nc}}$，容易知道

$$\| v_h-I_h^* v_h\|_{0,K}\leqslant ch_K\,|v_h|_{1,k}. \tag{7}$$

对于任意 $v_h\in V_h^{\mathrm{nc}}$，在式（6）两边同时乘以 $v_h(m_E)$，并在 $E\in\mathcal{E}_h^0$ 上求和，得到

$$a_h(u,I_h^* v_h)=(f,I_h^* v_h), \tag{8}$$

其中，双线性形式 $a_h(\cdot,I_h^*\cdot)$ 定义在 $(H_0^1+V_h^{\mathrm{nc}})\times(V_h^{\mathrm{nc}})$ 上，使得

$$a_h(u,I_h^* v_h)=\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0} v_h(m_E)\int_{\partial K_E^*}(-\boldsymbol{A}\nabla_h u+bu)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s+\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0} v_h(m_E)\int_{K_E^*} cu\mathrm{d}x.$$

有限体积元逼近 u_h 为下列问题的解：求 $u_h\in V_h^{\mathrm{nc}}$，使得

$$a_h(u_h,I_h^* v_h)=(f,I_h^* v_h),\quad \forall v_h\in V_h^{\mathrm{nc}}. \tag{9}$$

方程（3）可以写成如下形式：求 $u_h\in V_h^{\mathrm{nc}}$，使得

$$a_h(u_h,I_h^* v_h):=A(u_h,I_h^* v_h)+C(u_h,I_h^* v_h)=F(I_h^* v_h),\quad \forall v_h\in V_h^{\mathrm{nc}}, \tag{10}$$

其中，$A(u_h,I_h^* v_h)$ 和 $C(u_h,I_h^* v_h)$ 定义在 $V_h^{\mathrm{nc}}\times V_h^*$ 上，$F(I_h^* v_h)$ 定义在 V_h^* 上。具体形式如下：

$$A(u_h,I_h^* v_h)=\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0} v_h(m_E)\int_{\partial K_E^*}\left(-\boldsymbol{A}\nabla_h u_h\right)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s+\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0} v_h(m_E)\int_{K_E^*} cu_h\mathrm{d}x, \tag{11}$$

$$C(u_h,I_h^* v_h)=\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0} v_h(m_E)\int_{\partial K_E^*}(b\cdot\boldsymbol{n})\,u_h\mathrm{d}s, \tag{12}$$

$$F(I_h^* v_h)=\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0} v_h(m_E)\int_{K_E^*} f\mathrm{d}s. \tag{13}$$

下面运用迎风技巧去离散对流项，令 $\gamma_{ij}=\partial K_{E_i}^*\cap\partial K_{E_j}^*$. 首先定义

$$C^{\mathrm{up}}(u_h,I_h^* v_h)=\sum_{E_i\in\mathcal{E}_h^0} v_h(m_E)\sum_{\gamma_{ij}\subset E}\int_{\gamma_{ij}}((b\cdot\boldsymbol{n}_i)_+ u_h(m_{E_i})+(b\cdot\boldsymbol{n}_i)_- u_h(m_{E_j}))\mathrm{d}s. \tag{14}$$

则双线性形式如下：

$$\begin{aligned}a_h^{\mathrm{up}}(u_h,I_h^* v_h)=&-\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0} v_h(m_E)\int_{\partial K_E^*}\boldsymbol{A}\nabla_h u_h\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s+\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0} v_h(m_E)\int_{K_E^*} cu_h\mathrm{d}x+\\&\sum_{E_i\in\mathcal{E}_h^0} v_h(m_E)\sum_{\gamma_{ij}\subset E}\int_{\gamma_{ij}}((b\cdot\boldsymbol{n}_i)_+ u_h(m_{E_i})+(b\cdot\boldsymbol{n}_i)_- u_h(m_{E_j}))\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{15}$$

其中，$\boldsymbol{n}_i$ 为关于 $\partial K_{E_i}^*$ 的单位外法线向量；$(b\cdot\boldsymbol{n}_i)_+=\max(b\cdot\boldsymbol{n}_i,0)$，$(b\cdot\boldsymbol{n}_i)_-=\min(b\cdot\boldsymbol{n}_i,0)$.

方程（1）的迎风有限体积元逼近为：求 $u_h\in V_h^{\mathrm{nc}}$，使得

$$a_h^{\mathrm{up}}(u_h,I_h^* v_h):=A(u_h,I_h^* v_h)+C^{\mathrm{up}}(u_h,I_h^* v_h)=F(I_h^* v_h),\quad \forall v_h\in V_h^{\mathrm{nc}}. \tag{16}$$

3 具有迎风格式的 H^1 范数下的后验误差估计

为研究逼近误差在 H^1 范数意义下的后验误差估计，定义算子 $\mathcal{S}:V_h^{\mathrm{nc}}\to V_h^{\mathrm{c}}$ 如下：

$$\mathcal{S}v_h(x)=\frac{1}{N_x}\sum_{K\in\omega_x}v_h|_k(x),\ \forall v_h\in V_h^{\mathrm{nc}},\ x\in\mathcal{N}_h,$$

其中，ω_x 为具有公共顶点 x 的单元；N_x 为 ω_x 中的单元数目。算子 $\mathcal{S}$ 满足如下性质。

引理 1[11] 对于任意 $K\in\mathcal{T}_h$，令 $\mathcal{E}(\tilde{\omega}_K)\subset\mathcal{E}_h^0$，任意 $v_h\in V_h^{\mathrm{nc}}$，则有

$$\|v_h-\mathcal{S}v_h\|_{0,K}\lesssim\sum_{E\in\mathcal{E}(\tilde{\omega}_K)}h_E^{1/2}\|[v_h]_E\|_{0,E},\tag{17}$$

$$|v_h-\mathcal{S}v_h|_{1,K}\lesssim\sum_{E\in\mathcal{E}(\tilde{\omega}_K)}h_E^{-1/2}\|[v_h]_E\|_{0,E}.\tag{18}$$

引理 2 任意 $v_h\in V_h^{\mathrm{c}}$ 满足

$$C^{-1}|v_h|_{1,h}^2\leqslant\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{m_{E_i},m_{E_j}\in\mathcal{N}_h(K)}(v_h(m_{E_i})-v_h(m_{E_j}))^2\leqslant C|v_h|_{1,h}^2.$$

引理 3[12] 存在与 h 无关的常数 C，对任意 $v\big|_K\in H^1(K)$，有

$$\|v\|_{0,\partial K}^2\leqslant C(h_K^{-1}\|v\|_{0,K}+h_K|v|_{1,K}^2).$$

下面定义 H^1 范数意义下的残量误差估计子 $\eta(\mathcal{T}_h,u_h)$：

$$\eta(\mathcal{T}_h,u_h)=(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\eta_K^2+\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}\eta_E^2+(\eta^{\mathrm{up}})^2)^{1/2},\tag{19}$$

且

$$\eta_K=h_K\|f+\nabla_h\cdot(\boldsymbol{A}\nabla_h u_h-bu_h)-cu_h\|_{0,K},\tag{20}$$

$$\eta_E=h_E^{1/2}\|[\boldsymbol{A}\nabla_h u_h-bu_h]\cdot\boldsymbol{n}\|_{0,E}+h_E^{-1/2}\|[u_h]_E\cdot\boldsymbol{n}\|_{0,E},\tag{21}$$

$$\eta^{\mathrm{up}}=\{\sum_{K\in\mathcal{T}}\sum_{\gamma_{ij}\subset\gamma_K}\|h^{1/2}b\cdot\boldsymbol{n}(u_h(m_{E_i})-u_h)\|_{L^2(\gamma_{ij})}^2\}^{1/2},\tag{22}$$

其中，$\gamma_K:=\cup_{\gamma_{ij}}(K\cap\gamma_{ij})$.

下面给出误差 $e=u-u_h$ 在 H^1 范数意义下的具有迎风格式的局部上界。

定理 1 令 u 和 u_h 分别为式（6）和式（16）的解，则

$$\|u-u_h\|_{1,h}\lesssim\eta(\mathcal{T}_h,u_h).\tag{23}$$

证明：由于 $a_h^{\mathrm{up}}(u_h,I_h^*v_h)=F(I_h^*v_h)$ 和 $a_h(u,I_h^*v_h)=F(I_h^*v_h)$，有

$$a_h^{\mathrm{up}}(u_h,I_h^*v_h)-a_h(u,I_h^*v_h)=0.$$

对任意 $v_h\in V_h^{\mathrm{nc}}$，有如下误差表示：

$$\begin{aligned}\|u-\mathcal{S}u_h\|_1^2&\lesssim a(u-\mathcal{S}u_h,u-\mathcal{S}u_h)\\&=a(u-\mathcal{S}u_h,u-\mathcal{S}u_h)-a_h(u,I_h^*v_h)+a_h^{\mathrm{up}}(u_h,I_h^*v_h)\\&=(a(u-\mathcal{S}u_h,u-\mathcal{S}u_h)-a_h(u-u_h,I_h^*v_h))+(a_h^{\mathrm{up}}(u_h,I_h^*v_h)-a_h(u_h,I_h^*v_h))\\&=(a(u-\mathcal{S}u_h,u-\mathcal{S}u_h)-a_h(u-u_h,I_h^*v_h))+(C^{\mathrm{up}}(u_h,I_h^*v_h)-C(u_h,I_h^*v_h)).\end{aligned}\tag{24}$$

首先，估计式（24）右端第一项，有

$$\begin{aligned}&a(u-\mathcal{S}u_h,u-\mathcal{S}u_h)-a_h(u-u_h,I_h^*v_h)\\&=a(u-u_h+u_h-\mathcal{S}u_h,u-\mathcal{S}u_h)-a_h(u-u_h,I_h^*v_h)\\&=a(u_h-\mathcal{S}u_h,u-\mathcal{S}u_h)+(a(u-u_h,u-\mathcal{S}u_h)-a_h(u-u_h,I_h^*v_h)).\end{aligned}\tag{25}$$

对于式（25）右端第一项，依据引理 1 有

$$\begin{aligned}a(u_h-\mathcal{S}u_h,u-\mathcal{S}u_h)&\lesssim\|u_h-\mathcal{S}u_h\|_{1,h}\|u-\mathcal{S}u_h\|_1\\&\lesssim(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\sum_{E\in\mathcal{E}(\tilde{w}_K)}h_E^{-1}\|[u_h]_E\|_{0,E}^2)^{1/2}\|u-\mathcal{S}u_h\|_1.\end{aligned}\tag{26}$$

下面估计式（25）的第二项，令 $v=u-\mathcal{S}u_h$，由 $a_h(\cdot,I_h^*\cdot)$ 的定义和高斯散度定理，首先有

$$\begin{aligned}a_h(u-u_h,I_h^*v_h)&=a_h(u,I_h^*v_h)-a_h(u_h,I_h^*v_h)\\&=(f,I_h^*v_h)+\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}v_h(m_E)\int_{\partial K_E^*}(\boldsymbol{A}\nabla_h u_h-bu_h)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s-\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}v_h(m_E)\int_{K_E^*}(cu_h)\mathrm{d}x\\&=(f,I_h^*v_h)+\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}v_h(m_E)\int_E[\boldsymbol{A}\nabla_h u_h-bu_h]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s+\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}v_h(m_E)\int_{K_E^*}\nabla_h\cdot(\boldsymbol{A}\nabla_h u_h-bu_h)\mathrm{d}x-\\&\quad\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}v_h(m_E)\int_{K_E^*}(cu_h)\mathrm{d}x\\&=(f+\nabla_h\cdot(\boldsymbol{A}\nabla_h u_h-bu_h)-cu_h,I_h^*v_h)+\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}v_h(m_E)\int_E[\boldsymbol{A}\nabla_h u_h-bu_h]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{27}$$

又依据 u 为式（2）的解和分部积分，有

$$\begin{aligned}a(u-u_h,v)&=a(u,v)-a(u_h,v)\\&=(f,v)-a(u_h,v)\\&=(f-cu_h,v)-\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K(\boldsymbol{A}\nabla_h u_h-bu_h)\cdot\nabla v\mathrm{d}x\\&=(f-cu_h,v)-\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\int_{\partial K}v(\boldsymbol{A}\nabla_h u_h-bu_h)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s+\int_K v\nabla_h\cdot(\boldsymbol{A}\nabla_h u_h-bu_h)\mathrm{d}x)\\&=(f+\nabla_h\cdot(\boldsymbol{A}\nabla_h u_h-bu_h)-cu_h,v)+\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}\int_E(\boldsymbol{A}\nabla_h u_h-bu_h)\boldsymbol{n}v\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{28}$$

由式（27）和式（28），得

$$\begin{aligned}&a(u-u_h,v)-a_h(u-u_h,I_h^*v_h)\\&=(f+\nabla_h\cdot(\boldsymbol{A}\nabla_h u_h-bu_h)-cu_h,v-I_h^*v_h)+\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}\int_E(\boldsymbol{A}\nabla_h u_h-bu_h)\boldsymbol{n}(v-I_h^*v_h)\mathrm{d}s\\&=I_1+I_2.\end{aligned}\tag{29}$$

令 $\mathcal{J}:H_0^1(\Omega)\to V_h^{\mathrm{c}}$ 为 Clément 插值算子[13~14]，满足如下估计：

$$\begin{aligned}&|\nabla\mathcal{J}v\|_0\lesssim\|\nabla v\|_0,\\&\|v-\mathcal{J}v\|_{0,K}\lesssim h_K\|\nabla v\|_{0,\tilde{\omega}_K},\quad\forall K\in\mathcal{T}_h,\\&\|v-\mathcal{J}v\|_{0,E}\lesssim h_E^{1/2}\|\nabla v\|_{0,\tilde{\omega}_E},\quad\forall E\in\mathcal{E}_h.\end{aligned}\tag{30}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leqslant \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K \| f+\nabla_h\cdot(\boldsymbol{A}\nabla_h u_h - \boldsymbol{b}u_h) - cu_h \|_{0,K} \cdot h_K^{-1} \| v - I_h^* v_h \|_{0,K} \\
&\leqslant (\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \eta_K^2)^{1/2} (\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{-2} \| v - I_h^* v_h \|_{0,K}^2)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

下面估计 $\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{-2} \| v - I_h^* v_h \|_{0,K}^2$.

又因为 Clément 插值算子满足如下估计：

$$
| v - \mathcal{J}v \|_{0,K} \leqslant ch_K \| \nabla v \|_{0,\tilde{\omega}_K} \| \nabla \mathcal{J}v \|_0 \leqslant \| \nabla v \|_0 . \tag{32}
$$

令 $v_h = \mathcal{J}v$ ，由式（32）和式（7），有

$$
\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{-2} \| v - I_h^* v_h \|_{0,K}^2 \leqslant \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^{-2} (\| v - \mathcal{J}v \|_{0,K}^2 + \| \mathcal{J}v - I_h^* \mathcal{J}v \|_{0,K}^2) \leqslant C \| v \|_1^2 . \tag{33}
$$

由式（31）和式（33），得

$$
| I_1 | \leqslant C(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \eta_K^2)^{1/2} \| v \|_1 \leqslant C\eta(\mathcal{T}_h, u_h) \| v_h \|_1 . \tag{34}
$$

由引理 3 和式（32），有

$$
\| v - I_h^* v_h \|_{0,E} \leqslant \| v - \mathcal{J}v \|_{0,E} + \| \mathcal{J}v - I_h^* \mathcal{J}v \|_{0,E} \leqslant Ch_E^{1/2} \| \nabla v \|_{0,\tilde{\omega}_E} + ch_E^{1/2} \| \nabla v_h \|_{0,\omega_E} . \tag{35}
$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式和式（35），有

$$
\begin{aligned}
| I_2 | &\leqslant C \sum_{E\in\mathcal{E}_h^0} h_E^{1/2} \| [\boldsymbol{A}\nabla_h u_h - \boldsymbol{b}u_h]\cdot\boldsymbol{n} \|_{0,E} (\| \nabla v \|_{0,\tilde{\omega}_E} + \| \nabla v_h \|_{0,\omega_E}) \\
&\leqslant C(\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0} \eta_E^2)^{1/2} (\| \nabla v \|_0 + \| \nabla \mathcal{J}v \|_0) \\
&\leqslant C(\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0} \eta_E^2)^{1/2} \| v \|_1 \\
&\leqslant C\eta(\mathcal{T}_{h,u_h}) \| v \|_1 \\
&= C\eta(\mathcal{T}_{h,u_h}) \| u - \mathcal{S}u_h \|_1 .
\end{aligned}
\tag{36}
$$

则由式（34）和式（36），得

$$
a(u-u_h, v) - a_h(u-u_h, I_h^* v_h) \lesssim C\eta(\mathcal{T}_h, u_h) \| v \|_1 = C\eta(\mathcal{T}_h, u_h) \| u - \mathcal{S}u_h \|_1 . \tag{37}
$$

依据式（26）和式（37）得到式（24）右端第一项的估计：

$$
a(u-\mathcal{S}u_h, u-\mathcal{S}u_h) - a_h(u-u_h, I_h^* v_h) \lesssim \eta(\mathcal{T}_h, u_h) \| u - \mathcal{S}u_h \|_1 . \tag{38}
$$

对于式（24）的第二项，由式（12）和式（14），有

$$
\begin{aligned}
C^{\mathrm{up}}(u_h, I_h^* v_h) - C(u_h, I_h^* v_h) &= \sum_{E_i\in\mathcal{E}_h^0} v_h(m_{E_i}) \sum_{\gamma_{ij}\subset E} \int_{\gamma_{ij}} ((\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_i)_+ u_h(m_{E_i}) + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_i)_- u_h(m_j)) \mathrm{d}s - \sum_{E_i\in\mathcal{E}_h^0} v_h(m_{E_i}) \int_{\partial K_E^*} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} u_h \mathrm{d}s \\
&= \sum_{E_i\in\mathcal{E}_h^0} v_h(m_{E_i}) \sum_{\gamma_{ij}\subset E} \int_{\gamma_{ij}} ((\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_i)_+ u_h(m_{E_i}) + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}_i)_- u_h(m_j) - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} u_h) \mathrm{d}s .
\end{aligned}
\tag{39}
$$

这里由 γ_{ij} 上的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ ，确定 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n} \geqslant 0$ 为正方向。

令指数(ij)满足$(u_{m_{E_i}}-u_{m_{E_j}})\cdot\boldsymbol{n}\leqslant 0$，得

$$C^{\mathrm{up}}(u_h,I_h^*v_h)-C(u_h,I_h^*v_h)=\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}\sum_{\gamma_{ij}\subset E}(v_h(m_{E_i})-v_h(m_{E_j}))\int_{\gamma_{ij}}(b\cdot\boldsymbol{n}(u_h(m_{E_i})-u_h))\mathrm{d}s. \quad (40)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}C^{\mathrm{up}}(u_h,I_h^*v_h)-C(u_h,I_h^*v_h)&\leqslant|\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}\sum_{\gamma_{ij}\subset E}(v_h(m_{E_i})-v_h(m_{E_j}))^2|^{1/2}|(\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}\sum_{\gamma_{ij}\subset E}(\int_{\gamma_{ij}}(b\cdot\boldsymbol{n}(u_h(m_{E_i})-u_h)\mathrm{d}s)^2|^{1/2}\\&\leqslant|\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}\sum_{\gamma_{ij}\subset E}(v_h(m_{E_i})-v_h(m_{E_j}))^2|^{1/2}|(\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}\sum_{\gamma_{ij}\subset E}h\int_{\gamma_{ij}}(b\cdot\boldsymbol{n}(u_h(m_{E_i})-u_h)\mathrm{d}s)^2|^{1/2}\\&\leqslant C|v_h|_1(\sum_{E\in\mathcal{E}_h^0}\sum_{\gamma_{ij}\subset E}\|h^{1/2}b\cdot\boldsymbol{n}(u_h(m_{E_i})-u_h)\|_{L^2(r_{ij})}^2)^{1/2}\\&\leqslant C|\mathcal{J}v|_1\,\eta^{\mathrm{up}}\leqslant C|v|_1\,\eta^{\mathrm{up}}\leqslant C|u-\mathcal{S}u_h|_1\,\eta^{\mathrm{up}}.\end{aligned} \quad (41)$$

因此，由式（24）～式（26）、式（38）和式（41），得

$$\|u-\mathcal{S}u_h\|_1\lesssim\eta(\mathcal{T}_h,u_h), \quad (42)$$

由三角不等式、式（37）和引理 2，得

$$\|u-u_h\|_{1,h}=\|u-\mathcal{S}u_h+\mathcal{S}u_h-u_h\|_{1,h}\leqslant\|u-\mathcal{S}u_h\|_1+\|\mathcal{S}u_h-u_h\|_{1,h}\lesssim\eta(\mathcal{T}_h,u_h). \quad (43)$$

定理得证。

4 结论

本文给出了对流扩散反应方程基于 Crouzeix-Raviart 元的有限体积元方法，并采用迎风格式处理对流项，得到了逼近误差在 H^1 范数意义下的后验误差估计整体上界。

[参考文献] (References)

[1] CHOU S H, LI Q. Error estimates in L^2, H^1 and L^∞ in covolume methods for elliptic and parabolic problems: a unified approach[J]. Mathematics of Computation, 2000, 69(229): 103-120.

[2] AFIF M, BERGAM A, MGHAZLI Z, et al. A posteriori estimators for the finite volume discretization of an elliptic problem[J]. Numerical Algorithms, 2003, 34(2): 127-136.

[3] BERGAM A, MGHAZLI Z, VERFÜRTH R. Estimations a posteriori d'un schéma de volumes finis pour un problème non linéaire[J]. Numerische Mathematik, 2003, 95(4): 599-624.

[4] CARSTENSEN C, LAZAROV R, TOMOV S. Explicit and averaging a posteriori error estimates for adaptive finite volume methods[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2005, 42(6): 2496-2521.

[5] OHLBERGER M. A posteriori error estimates for vertex centered finite volume approximations of convection-diffusion-reaction equations[J]. Esaim Mathematical Modelling & Numerical Analysis, 2000, 35(2): 355-387.

[6] NICAISE S. A posteriori error estimates of some cell-centered finite volume methods[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2006, 43(4): 1481-1503.

[7] NICAISE S. A posteriori error estimations of some cell-centered finite volume methods for diffusion-convection-reaction problems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2006, 44(3): 949-978.

[8] VOHRELÍK M. Residual flux-based aposteriori error estimates for finite volume and related locally conservative methods[J]. Numerische Mathematik, 2008, 111(1): 121-158.

[9] BI C J, LI L K. The mortar finite volume with the Crouzeix-Raviart element for elliptic problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192(1-2): 15-31.

[10] CHATZIPANTELIDIS P, MAKRIDAKIS C, PLEXOUSAKIS M. A posteriori error estimates for a finite volume method for the Stokes problem in two dimensions[J]. Applied Numerical Mathematics, 2003, 46(1): 45-58 .

[11] YANG M. A posteriori error analysis of nonconforming finite volume elements for general second-order elliptic PDEs[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2011, 27(2): 277-291.

[12] CHATZIPANTELIDIS P. A finite volume method based on the Crouzeix-Raviart element for elliptic PDE's in two dimensions[J]. Numerische Mathematik, 1999, 82(3): 409-432.

[13] CLÉMENT P. Approximation by finite element functions using local regularization[J]. RAIRO Analyse Numérique, 1975, 9: 77-84.

[14] SCOTT L R, ZHANG S. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions[J]. Mathematics of Computation, 1990, 54(190): 483-493.