

时滞 HTLV-I 病毒模型的稳定性与分支分析

杨纪华¹, 张二丽², 刘 媚¹

(1. 宁夏师范学院数学与计算机科学学院, 宁夏固原 756000;

2. 郑州财经学院信息工程学院, 郑州 450000)

摘要: 从系统线性化方程特征方程根的分布分析入手, 讨论系统平衡点的局部稳定性, 确定了系统的线性稳定性区域, 发现当系统中的时滞经过一系列临界值时, 系统经历了 Hopf 分支和 Hopf-zero 分支, 并发现当时滞较大时, 系统出现了混沌现象。然后, 利用中心流形理论和 Hassard 规范型方法分析分支周期解的稳定性和 Hopf 分支的分支方向, 给出了关于分支方向和分支周期解稳定性的详细计算公式。最后, 通过数值模拟验证了理论结果。

关键词: 应用数学; 稳定性; Hopf 分支; Hopf-zero 分支; 混沌

中图分类号: O175.13 **文献标识码:** A **文章编号:** 1674-2850(2016)07-0650-12

Stability and bifurcation analysis of the time-delay HTLV-I virus model

YANG Jihua¹, ZHANG Erli², LIU Mei¹

(1. School of Mathematics and Computer Science, Ningxia Normal University, Guyuan, Ningxia 756000, China;

2. School of Information Engineering, Zhengzhou Institute of Finance and Economics, Zhengzhou 450000, China)

Abstract: The local stability of the equilibrium is discussed by analyzing the characteristic equation of the linearized system of original system at the equilibrium. The regions of linear stability of equilibrium are given, it is found that Hopf bifurcation and Hopf-zero bifurcation exist when the delay passes through a sequence of critical values and the chaos occurs when delay increase further. Then, using the center manifold theorem and the Hassard normal form method, the explicit formulas for determining the direction and stability of the Hopf bifurcation are determined. Finally, numerical simulations are carried out for supporting the analytic results.

Key words: applied mathematics; stability; Hopf bifurcation; Hopf-zero bifurcation; chaos

0 引言

人体 T 淋巴细胞白血病病毒 (human T-cell leukaemia virus type-I, HTLV-I) 是一种在人和动物体内引起严重疾病的逆转录病毒, 主要感染机体内 $CD4^+$ T 淋巴细胞, 能够引起缓慢的神经性疾病和 HTLV-I 相关性脊髓病, 同时发展为成人 T 细胞白血病。在机体内, HTLV-I 不存在自由病毒颗粒, 易感染细胞被感染是通过细胞与细胞之间接触而传递 HTLV-I 病毒颗粒。因此, 为获知 HTLV-I 相关疾病的发病机理, 掌握机体内 HTLV-I 病毒、易感染细胞及免疫反应之间的相互作用机制, 展开其模型的研究显得尤为重要^[1-3]。文献[2]研究了 HTLV-I 模型的全局动力学性质, 得到了模型的基本再生数 R_0 , 并且证明了模型的动力学性质完全由 R_0 决定。文献[3]研究了 HTLV-I 感染模型的稳定性与周期振动, 研究表明在慢性感

基金项目: 国家自然科学基金 (11361046); 宁夏科技支撑计划 (宁科计字[2015]26(4)); 宁夏自然科学基金 (NZ13213); 河南省高等学校重点科研项目 (16A110038); 宁夏高等学校科研项目 (宁教高[2014]222(17))

作者简介: 杨纪华 (1983—), 男, 讲师, 主要研究方向: 微分方程的稳定性与分支理论. E-mail: jihua1113@163.com

染区, 没有平衡点是全局吸引的, 并且稳定和不稳定的周期振荡可以通过 Hopf 分支产生。

在机体内, 像其他 RNA 病毒一样, 由于易出错的 DNA 聚合酶导致在 HTLV-I 病毒复制过程中存在大量核苷酸置换, 并迅速累积为 HTLV-I 序列, 促进 HTLV-I 病毒不断增殖。依据 HTLV-I 病毒的感染方式, 结合双线性传染率, 考虑到免疫响应速率的变化特性, GÓMEZ-ACEVEDO 等^[4]获得如下模型:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mu - dx(t) - \beta x(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = \sigma\beta x(t)y(t) - \delta y(t) - py(t)z(t), \\ \dot{z}(t) = \frac{ky(t)z(t)}{L + z(t)} - bz(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 分别为宿主体内易感染 T 细胞、已感染 T 细胞和毒素 T 淋巴细胞在 t 时刻的数量; μ 为易感染 T 细胞的生产率; d 、 δ 、 b 分别为易感染 T 细胞、已感染 T 细胞和毒素 T 淋巴细胞的自然死亡率; β 为易感染 T 细胞和已感染 T 细胞之间的感染率; σ 为新感染的细胞再次感染易感染细胞的比率, $\sigma \in [0, 1]$; p 为已感染 T 细胞和毒素 T 淋巴细胞之间作用的死亡率; k 为免疫响应强度; L 为非零常数。

由于已感染 T 细胞刺激机体到机体产生免疫细胞需要一定的反应时间, 存在反应时滞, 为此将模型(1)推导为如下具有时滞的 HTLV-I 模型:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mu - dx(t) - \beta x(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = \sigma\beta x(t)y(t) - \delta y(t) - py(t)z(t), \\ \dot{z}(t) = \frac{ky(t-\tau)z(t-\tau)}{L + z(t-\tau)} - bz(t). \end{cases} \quad (2)$$

本文从稳定性与分支的角度研究系统(2), 并借鉴文献[5]~[6]的方法, 对系统模型的平衡点稳定性、Hopf 分支和 Hopf-zero 分支的存在性以及 Hopf 分支的性质进行分析。

1 平衡点的稳定性与 Hopf 分支的存在性

本节将研究时滞对系统(2)动力学行为的影响。显然, 当 $\tau=0$ 时, 系统(2)即为系统(1)。容易得到系统(2)的平衡点为 $S_1 = (\mu d^{-1}, 0, 0)$, $S_2 = (\delta\sigma^{-1}\beta^{-1}, \sigma\mu\delta^{-1} - d\beta^{-1}, 0)$ 和 $S_3 = ((\delta + p\gamma)\sigma^{-1}\beta^{-1}, b(L + \gamma)k^{-1}, \gamma)$, 其中,

$$\gamma = \frac{-(\delta b\beta + pdk + Lpb\beta) + \sqrt{(\delta b\beta + pdk + Lpb\beta)^2 + 4pb\beta(k\sigma\beta\mu - dk\delta - Lb\delta\beta)}}{2pb\beta}.$$

对于任意平衡点 $S_* = (x_*, y_*, z_*)$, 系统(2)在此平衡点处的特征方程为

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (3)$$

其中,

$$a_2 = d + \delta + b + \beta y_* - \sigma\beta x_* - pz_*;$$

$$a_1 = d\delta + bd + b\delta + \delta\beta y_* + b\beta y_* - \sigma b\beta x_* - \sigma d\beta x_* - pbz_* - pdz_* - p\beta y_* z_*;$$

$$a_0 = b(d\delta + \delta\beta y_* - \sigma d\beta x_* - pdz_* - p\beta y_* z_*);$$

$$b_1 = \frac{pky_*z_*}{L + z_*} - \frac{ky_*}{(L + z_*)^2}(d + \delta + \beta y_* - \sigma\beta x_* - pz_*);$$

$$b_2 = -\frac{ky_*}{(L + z_*)^2};$$

$$b_0 = \frac{pky_*z_*}{L+z_*}(d+\beta y_*) - \frac{ky_*}{(L+z_*)^2}(d\delta + \delta\beta y_* - \sigma d\beta x_* - pdz_* - p\beta y_*z_*).$$

根据微分方程的定性理论及 Hurwitz 判据^[7], 可得如下引理。

引理 1 1) 当 $\tau=0$, $a_0+b_0=0$ 时, $\lambda=0$ 是方程 (3) 的根; 当 $a_0+b_0=0$, $a_2+b_2>0$, 且 $a_1+b_1>0$ 时, 方程 (3) 有一个零根和两个具有负实部的根, 此时, 系统 (1) 经历了不动点分支; 2) 设 $\tau=0$, 如果 (H1) $a_0+b_0>0$, $a_2+b_2>0$, $(a_1+b_1)(a_2+b_2)>a_0+b_0$, 则系统 (2) 的平衡点 S_* 是局部渐近稳定的。

设 $i\omega(\omega>0)$ 是方程 (3) 的根, 代入方程 (3) 并分离实部和虚部可得

$$\begin{cases} -\omega^3 + a_1\omega = (b_0 - b_2\omega^2)\sin\omega\tau - b_1\omega\cos\omega\tau, \\ -a_2\omega^2 + a_0 = (b_2\omega^2 - b_0)\cos\omega\tau - b_1\omega\sin\omega\tau. \end{cases} \quad (4)$$

将式 (4) 中两个方程平方相加可得

$$\omega^6 + p\omega^4 + q\omega^2 + r = 0, \quad (5)$$

其中, $p = a_2^2 - 2a_1 - b_2^2$; $q = a_1^2 - 2a_0a_2 + 2b_0b_2 - b_1^2$; $r = a_0^2 - b_0^2$. 令 $\xi = \omega^2$, 方程 (5) 化为

$$\xi^3 + p\xi^2 + q\xi + r = 0. \quad (6)$$

记

$$h(\xi) = \xi^3 + p\xi^2 + q\xi + r. \quad (7)$$

引理 2 1) 如果 $a_0^2 < b_0^2$, 方程 (6) 至少有一个正实根; 2) 如果 $a_0^2 \geq b_0^2$ 且 $\Delta \leq 0$, 则方程 (6) 没有正实根。

证明: 1) 因为 $\lim_{\xi \rightarrow \infty} h(\xi) = \infty$, 所以当 $a_0^2 < b_0^2$ 时, 方程 (6) 至少有一个正实根。

2) 由式 (7) 可得

$$\frac{dh(\xi)}{d\xi} = 3\xi^2 + 2p\xi + q.$$

显然当 $\Delta \leq 0$ 时, 函数 $h(\xi)$ 在 $[0, \infty)$ 上是单调增加的, 因此当 $a_0^2 \geq b_0^2$ 且 $\Delta \leq 0$ 时, 方程 (6) 没有正实根。引理 2 得证。

为此作假设 (H2) $a_0^2 < b_0^2$.

不失一般性, 假设方程 (6) 有三个正实根 ξ_1, ξ_2 和 ξ_3 , 于是方程 (5) 有三个正根 $\omega_k = \sqrt{\xi_k} (k=1,2,3)$. 记

$$\tau_k^j = \frac{1}{\omega_k} [\arccos A + 2j\pi], \quad k=1,2,3; j=0,1,2,\dots \quad (8)$$

其中,

$$A = \frac{(b_1 - a_2b_2)\omega_k^4 + (a_2b_0 + a_0b_2 - a_1b_1)\omega_k^2 - a_0b_0}{b_1^2\omega_k^2 + (b_2\omega_k^2 - b_0)^2}.$$

当 $\tau = \tau_k^j$ 时, 方程 (3) 有一对纯虚根 $\pm i\omega_k$, 定义

$$\tau_0 = \tau_{k_0}^0 = \min_{k \in \{1,2,3\}} \{\tau_k^0\}, \quad \omega_0 = \omega_{k_0}. \quad (9)$$

注意到当 $\tau=0$ 时, 方程 (3) 变为

$$\lambda^3 + (a_2 + b_2)\lambda^2 + (a_1 + b_1)\lambda + a_0 + b_0 = 0. \quad (10)$$

令 $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\omega(\tau)$ 是方程 (3) 的根, 且满足 $\alpha(\tau_k^j) = 0$, $\omega(\tau_k^j) = \omega_k (k=1,2,3)$.

引理 3^[8] 设 $f(\lambda, \tau) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 e^{-\lambda\tau} + a_3\lambda e^{-\lambda\tau} + a_4 e^{-\lambda\tau} + a_5$, 则当 τ 变化时, $f(\lambda, \tau)$ 位于右半平面的零点重数之和只有当虚轴上出现零点或有零点穿过虚轴时才发生变化, 其中, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$ 且 $\tau \geq 0$.

由引理 3 可得如下引理 4.

引理 4 假设 (H1) 成立,

1) 如果 $a_0^2 \geq b_0^2$ 且 $\Delta \leq 0$ 成立, 则当 $\tau \geq 0$ 时, 方程 (3) 的根都具有负实部;

2) 如果 (H2) 成立, 则当 $\tau = \tau_k^j$ 时, 方程 (3) 有一对简单纯虚根 $\pm i\omega_k$, 且当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时, 方程 (3) 的根都具有负实部, 其中 τ_k^j 如式 (8) 定义.

引理 5 如果 $h'(\xi_k) \neq 0$, 则 $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_k^j} \neq 0$, 且 $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_k^j}$ 与 $h'(\xi_k)$ 符号相同.

证明: 将 $\lambda(\tau)$ 代入式 (3), 两端关于 τ 求导可得

$$\left[\frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau)}{d\tau} \right]^{-1} \Big|_{\tau=\tau_k^j} = \frac{\xi_k}{\Omega} (3\xi_k^2 + 2p\xi_k + q) = \frac{\xi_k}{\Omega} h'(\xi_k),$$

其中, $\Omega = b_1^2 \omega_k^4 + (b_0 \omega_k - b_2 \omega_k^3)^2$. 因为 $\xi_k > 0$, $\Omega > 0$ 且 $h'(\xi_k) \neq 0$, 所以 $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_k^j} \neq 0$, 且 $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_k^j}$

与 $h'(\xi_k)$ 符号相同. 引理 5 得证.

由本文引理 1 和引理 5 以及文献[9]中第 11 章的定理 1.1, 可以得到下面关于系统 (2) 的平衡点的稳定性与 Hopf 分支的存在性定理.

定理 1 假设 (H1) 成立,

1) 如果 $a_0^2 \geq b_0^2$ 且 $\Delta \leq 0$ 成立, 则当 $\tau \geq 0$ 时, 系统 (2) 的平衡点 S_* 是局部渐近稳定的.

2) 如果 (H2) 成立, 则当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时, 系统 (2) 的平衡点 S_* 是局部渐近稳定的.

3) 如果 (H2) 且 $h'(\xi_k) \neq 0$ 成立, 则随着 τ 的增加, 将出现一系列稳定性开关, 并且系统 (2) 的平衡点最终变为不稳定; 当 $\tau = \tau_k^j$ 时, 系统 (2) 经历 Hopf 分支.

2 Hopf-zero 分支的存在性分析

下面证明系统 (2) 存在 Hopf-zero 分支.

引理 6 如果 $a_0 + b_0 = 0$, $a_2 + b_2 > 0$, $a_1 + b_1 > 0$, 则当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时, 方程 (3) 除了有一个零根外, 其余根都具有负实部.

证明: 因为 $a_0 + b_0 = 0$, 所以 0 是方程 (3) 的根. 由引理 4 可知, 方程 (3) 没有纯虚根.

用反证法. 令 $a_0 + b_0 = a$, 假设存在 $\tau^* \in (0, \tau_0)$, 使得方程 (3) 有实部为正的根, 记为 $\lambda_0 = \nu_0 + i\zeta_0$, 设 $\lambda(a, \tau) = \nu(a, \tau) + i\zeta(a, \tau)$ 是方程 (3) 的根, 且满足 $\nu(a=0, \tau^*) = \nu_0 > 0$, $\zeta(a=0, \tau^*) = \zeta_0$. 因为 $\nu(a, \tau)$ 关于 a 连续, 则存在 $\kappa_1 > 0$, 当 $a \in (0, \kappa_1)$ 时, $\nu(a, \tau^*) > 0$. 又 $\lim_{a \rightarrow 0} \tau_0(a) = \tau_0$, 所以对 $0 < \gamma_0 \leq \tau_0 - \tau^*$, 存在 $\kappa_2 > 0$, 当 $a \in (0, \kappa_2)$ 时, 使得 $|\tau_0(a) - \tau_0| < \gamma_0$, 进而可得 $\tau^* \in (0, \tau_0(a))$. 取 $\kappa = \min\{\kappa_1, \kappa_2\}$, 则当 $a \in (0, \kappa)$ 时, $\nu(a, \tau^*) > 0$ 且 $\tau^* \in (0, \tau_0(a))$. 另一方面, 由引理 4 可知, 当 $a \in (0, \kappa)$ 时, 方程 (3) 的根都具有负实部, 矛盾. 引理 6 得证.

定理 2 如果 $a_0 + b_0 = 0$, $a_2 + b_2 > 0$, $a_1 + b_1 > 0$, 则当 $\tau = \tau_0$ 时, 方程 (3) 除了有一个零根和一对纯虚根 $\pm i\omega_0$ 外, 其余根都具有负实部。此时系统 (2) 在平衡点 S_* 处经历了 Hopf-zero 分支。

证明: 显然, 0 是方程 (3) 的根, 由引理 4 可知, $\pm i\omega_0$ 也是方程 (3) 的根。假设当 $\tau = \tau_0$ 时, 方程 (3) 有一个根具有正实部, 记为 $\lambda_0 = \nu_0 + i\zeta_0$ 。设 $\lambda(\tau) = \nu(\tau) + i\zeta(\tau)$ 是方程 (3) 的根, 且满足 $\nu(\tau_0) = \nu_0 > 0$, $\zeta(\tau_0) = \zeta_0$ 。因此当 $\tau \mapsto \tau_0^-$ 时, 方程 (3) 有具有正实部的根, 这与引理 6 矛盾。定理 2 得证。

3 Hopf 分支的方向与稳定性

在上一部分中, 得到了在平衡点附近产生一族 Hopf 分支的条件, 本节将研究它们的方向和稳定性。主要运用中心流形理论和 Hassard 规范型方法^[10]。不失一般性, 系统 (2) 在平衡点 S_* 经历 Hopf 分支的临界值为 $\tau = \tau_*$, $\pm i\omega_*$ 为与之相应特征方程的纯虚根。

令 $\hat{x} = x - x_*$, $\hat{y} = y - y_*$, $\hat{z} = z - z_*$, $t \rightarrow \frac{t}{\tau}$, 则系统 (2) 变为

$$\dot{X}(t) = L_\mu(X_t) + f(\mu, X_t), \tag{11}$$

其中, $X(t) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))^T \in \mathbb{R}^3$; $L_\mu: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$; $f: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$; 对 $\varphi \in C([-1, 0], \mathbb{R}^3)$, 有

$$L_\mu(\varphi) = (\tau_* + \mu) \begin{pmatrix} -d - \beta y_* & -\beta x_* & 0 \\ \sigma \beta y_* & \sigma \beta x_* - \delta - p z_* & -p y_* \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \varphi(0) + (\tau_* + \mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kz_*}{L + z_*} & \frac{Lky_*}{(L + z_*)^2} \end{pmatrix} \varphi(-1),$$

$$f(\mu, \varphi) = (\tau_* + \mu) \begin{pmatrix} -\beta \varphi_1(0) \varphi_2(0) \\ \sigma \beta \varphi_1(0) \varphi_2(0) - p \varphi_2(0) \varphi_3(0) \\ \frac{k}{L} \varphi_2(-1) \varphi_3(-1) - \frac{k}{L^2} \varphi_2(-1) \varphi_3^2(-1) + \dots \end{pmatrix}.$$

由 Riesz 表示定理, 当 $\theta \in [-1, 0]$ 时, 存在有界变差矩阵函数 $\eta(\theta, \mu)$, 使得

$$L_\mu(\varphi) = \int_{-1}^0 [d\eta(\theta, \mu)] \varphi(\theta), \quad \varphi \in C([-1, 0], \mathbb{R}^3).$$

对 $\varphi \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^3)$, 定义

$$A(\mu)\varphi = \begin{cases} d\varphi(\theta)/d\theta, & \theta \in [-1, 0), \\ \int_{-1}^0 d\eta(t, \mu)\varphi(t), & \theta = 0; \end{cases} \quad R(\mu)\varphi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0), \\ f(\mu, \varphi), & \theta = 0. \end{cases} \tag{12}$$

这样式 (11) 可以写成

$$\dot{u}_t = A(\mu)u_t + R(\mu)u_t, \tag{13}$$

其中, $u(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$; $u_t(\theta) = u(t + \theta)$, $\theta \in [-1, 0]$ 。

对 $\psi \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$, 定义

$$A^* \psi(s) = \begin{cases} -d\psi(s)/ds, & s \in (0,1], \\ \int_{-1}^0 \psi(-t)d\eta(t,0), & s = 0. \end{cases}$$

对 $\varphi, \psi \in C^1([-1,0], \mathbb{R}^3)$, 定义双线性形式

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \bar{\psi}(0)\varphi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta)d\eta(\theta)\varphi(\xi) d\xi,$$

其中, $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$; A^* 和 $A(0)$ 为伴随算子, $\pm i\omega_0\tau_0$ 是 $A(0)$ 的特征值, 同时也是 A^* 的特征值.

通过直接计算可得 $q(\theta) = (1, \alpha, \beta)^T e^{i\omega_*\tau_*\theta}$ 和 $q^*(s) = D(1, \alpha^*, \beta^*) e^{i\omega_*\tau_*s}$ 分别为 $A(0)$ 和 A^* 相应于 $i\omega_*\tau_*$ 和 $-i\omega_*\tau_*$ 的特征向量, 其中,

$$\alpha = -\frac{i\omega_* + d + \beta y_*}{\beta x_*}, \quad \beta = \frac{\sigma\beta^2 x_* y_* - (i\omega_* + d + \beta y_*)(i\omega_* - \sigma\beta x_* + \delta + pz_*)}{p\beta x_* y_*}, \quad \alpha^* = \frac{-i\omega_* + d + \beta y_*}{\sigma\beta y_*},$$

$$\beta^* = \frac{p(L + z_*)^2(d + \beta y_* - i\omega_*)}{\sigma\beta[(i\omega_* - b)(L + z_*)^2 + Lky_*e^{i\omega_*\tau_*}]}, \quad D = \frac{(L + z_*)^2}{(1 + \bar{\alpha}\alpha_* + \bar{\beta}\beta_*)(L + z_*)^2 + \tau_*\beta_*[\bar{\alpha}kz_*(L + z_*) + Lk\bar{\beta}y_*]} e^{i\omega_*\tau_*}.$$

而且 $\langle q^*, q \rangle = 1, \langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$.

设当 $\mu = 0$ 时, u_t 是方程 (13) 的解. 定义

$$z(t) = \langle q^*(\theta), u_t \rangle, \quad w(t, \theta) = u_t(\theta) - 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\}.$$

在中心流形 \mathcal{C}_0 上有

$$w(t, \theta) = w(z(t), \bar{z}(t), \theta),$$

其中,

$$w(z(t), \bar{z}(t), \theta) = w_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + w_{11}(\theta)z\bar{z} + w_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

z 和 \bar{z} 为中心流形上向量场在 q^* 和 \bar{q}^* 方向上的局部坐标, 注意如果 u_t 是实的, 则 w 也是实的, 因此只考虑实解.

对于方程 (11) 在 \mathcal{C}_0 上的解 u_t , 因为 $\mu = 0$, 于是

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= i\omega_*\tau_*z + \langle \bar{q}^*(\theta), f(w + 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\}) \rangle \\ &= i\omega_*\tau_*z + \bar{q}^*(0)f(\omega(z, \bar{z}, 0) + 2\text{Re}\{z(t)q(0)\}) \\ &\triangleq i\omega_*\tau_*z + \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z}), \end{aligned} \tag{14}$$

将其记为

$$\dot{z}(t) = i\tau_*\omega_*z(t) + g(z, \bar{z}), \tag{15}$$

其中,

$$f_0(z, \bar{z}) = f_{z^2}\frac{z^2}{2} + f_{z\bar{z}}z\bar{z} + f_{\bar{z}^2}\frac{\bar{z}^2}{2} + f_{z^2\bar{z}}\frac{z^2\bar{z}}{2} + \dots,$$

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0)f(\omega(z, \bar{z}, 0) + 2\text{Re}\{z(t)q(0)\}) = g_{20}\frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21}\frac{z^2\bar{z}}{2} + \dots$$

比较式 (14) 与式 (15) 的系数, 有

$$g_{20} = \bar{q}^*(0)f_{z^2}, \quad g_{11} = \bar{q}^*(0)f_{z\bar{z}}, \quad g_{02} = \bar{q}^*(0)f_{\bar{z}^2}, \quad g_{21} = \bar{q}^*(0)f_{z^2\bar{z}}. \tag{16}$$

由式 (13) 和式 (15) 可得

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \dot{u}_t - \dot{z}q - \dot{\bar{z}}\bar{q} \\ &= \begin{cases} Aw - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\}, & \theta \in [-1, 0) \\ Aw - 2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\} + f_0, & \theta = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} Aw + H(z, \bar{z}, \theta), \end{aligned} \quad (17)$$

其中,
$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta)z\bar{z} + H_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (18)$$

将式 (17) 左端展开并比较两端系数可得

$$(A - 2i\tau_*\omega_*I)w_{20}(\theta) = -H_{20}(\theta), \quad Aw_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta), \quad \dots \quad (19)$$

注意到 $u_t(\theta) = (x(t+\theta), y(t+\theta), z(t+\theta)) = w(t, \theta) + zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta)$, 可得

$$\begin{aligned} x(t) &= z + \bar{z} + w_{20}^{(1)}(0)\frac{z^2}{2} + w_{11}^{(1)}(0)z\bar{z} + w_{02}^{(1)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots, \\ y(t) &= \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + w_{20}^{(2)}(0)\frac{z^2}{2} + w_{11}^{(2)}(0)z\bar{z} + w_{02}^{(2)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots, \\ z(t) &= \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + w_{20}^{(3)}(0)\frac{z^2}{2} + w_{11}^{(3)}(0)z\bar{z} + w_{02}^{(3)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots, \\ y(t-1) &= \alpha z e^{-i\tau_*\omega_*} + \bar{\alpha}\bar{z} e^{i\tau_*\omega_*} + w_{20}^{(2)}(-1)\frac{z^2}{2} + w_{11}^{(2)}(-1)z\bar{z} + w_{02}^{(2)}(-1)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots, \\ z(t-1) &= \beta z e^{-i\tau_*\omega_*} + \bar{\beta}\bar{z} e^{i\tau_*\omega_*} + w_{20}^{(3)}(-1)\frac{z^2}{2} + w_{11}^{(3)}(-1)z\bar{z} + w_{02}^{(3)}(-1)\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots, \end{aligned}$$

因此可得

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z}) = \bar{D}\tau_*(1, \bar{\alpha}^*, \bar{\beta}^*) \begin{pmatrix} -\beta x(t)y(t) \\ \sigma\beta x(t)y(t) - py(t)z(t) \\ \frac{k}{L}y(t-1)z(t-1) - \frac{k}{L^2}y(t-1)z^2(t-1) + \dots \end{pmatrix}. \quad (20)$$

比较式 (20) 两端的系数可得

$$\begin{aligned} g_{20} &= 2\alpha\beta\bar{D}\tau_*(\sigma\bar{\alpha}^* - 1 - p\bar{\alpha}^* + \frac{k e^{-2i\omega_*\tau_*}}{L\beta^*}), \quad g_{11} = \bar{D}\tau_* \left[\beta(\alpha + \bar{\alpha})(\sigma\bar{\alpha}^* - 1) + (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)\left(\frac{k}{L\beta^*} - p\bar{\alpha}^*\right) \right], \\ g_{02} &= 2\bar{D}\bar{\alpha}\tau_* \left[\beta(\sigma\bar{\alpha}^* - 1) - p\bar{\alpha}^*\bar{\beta} + \frac{k\bar{\beta} e^{2i\omega_*\tau_*}}{L\beta^*} \right], \\ g_{21} &= \bar{D}\tau_*[\beta(\sigma\bar{\alpha}^* - 1)(2w_{11}^{(2)}(0) + w_{20}^{(2)}(0) + \bar{\alpha}w_{20}^{(1)}(0) + 2\alpha w_{11}^{(1)}(0)) - p\bar{\alpha}^*(2\alpha w_{11}^{(3)}(0) + \bar{\alpha}w_{20}^{(3)}(0) + \bar{\beta}w_{20}^{(2)}(0) + \\ &\quad 2\beta w_{11}^{(2)}(0)) + \frac{k}{L\beta^*}(2\alpha w_{11}^{(3)}(-1)e^{-i\tau_*\omega_*} + \bar{\alpha}w_{20}^{(3)}(-1)e^{i\tau_*\omega_*} + \bar{\beta}w_{20}^{(2)}(-1)e^{i\tau_*\omega_*} + 2\beta w_{11}^{(2)}(-1)e^{-i\tau_*\omega_*} - \frac{2\bar{\alpha}\beta^2 e^{-i\tau_*\omega_*}}{L})]. \end{aligned}$$

由式 (17) 得

$$H(z, \bar{z}, \theta) = \begin{cases} -2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\} = -gq(\theta) - \bar{g}\bar{q}(\theta), & \theta \in [-1, 0), \\ -2\operatorname{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\} + f_0 = -gq(0) - \bar{g}\bar{q}(0) + f_0, & \theta = 0. \end{cases} \quad (21)$$

当 $\theta \in [-1, 0)$ 时, 比较式 (21) 两端的系数可得

$$H_{20}(\theta) = -g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta), \quad H_{11}(\theta) = -g_{11}q(\theta) - \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta). \quad (22)$$

由式 (12)、式 (19) 和式 (22) 可得

$$w'_{20}(\theta) = 2i\tau_*\omega_*w_{20}(\theta) + g_{20}q(\theta) + \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta), \quad w'_{11}(\theta) = g_{11}q(\theta) + \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta). \quad (23)$$

解之得

$$\begin{aligned} w_{20}(\theta) &= \frac{ig_{20}}{\tau_*\omega_*}q(0)e^{i\theta\tau_*\omega_*} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_*\omega_*}\bar{q}(0)e^{-i\theta\tau_*\omega_*} + E_1e^{2i\theta\tau_*\omega_*}, \\ w_{11}(\theta) &= -\frac{ig_{11}}{\tau_*\omega_*}q(0)e^{i\theta\tau_*\omega_*} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\tau_*\omega_*}\bar{q}(0)e^{-i\theta\tau_*\omega_*} + E_2, \end{aligned} \quad (24)$$

其中, $E_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, E_1^{(3)})^T$, $E_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)}, E_2^{(3)})^T \in \mathbb{R}^3$ 为常向量. 下面计算常向量 E_1 和 E_2 . 当 $\theta = 0$ 时, 由式 (12) 和式 (19) 可得

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 d\eta(\theta)w_{20}(\theta) &= Aw_{20}(0) = 2i\tau_*\omega_*w_{20}(0) - H_{20}(0), \\ \int_{-1}^0 d\eta(\theta)w_{11}(\theta) &= Aw_{11}(0) = -H_{11}(0). \end{aligned} \quad (25)$$

由式 (21) 可得

$$\begin{aligned} H_{20}(0) &= -g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0) + 2\tau_*\alpha\beta \begin{pmatrix} -1 \\ \sigma - p \\ kL^{-1}e^{-2i\tau_*\omega_*} \end{pmatrix}, \\ H_{11}(0) &= -g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + 2\tau_* \begin{pmatrix} -\beta \operatorname{Re}\{\alpha\} \\ \sigma\beta \operatorname{Re}\{\alpha\} - p \operatorname{Re}\{\alpha\bar{\beta}\} \\ kL^{-1} \operatorname{Re}\{\alpha\bar{\beta}\} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$

将式 (24) 和式 (26) 代入式 (25), 并注意到

$$\left(i\tau_*\omega_*I - \int_{-1}^0 e^{i\theta\tau_*\omega_*} d\eta(\theta)\right)q(0) = 0, \quad \left(-i\tau_*\omega_*I - \int_{-1}^0 e^{-i\theta\tau_*\omega_*} d\eta(\theta)\right)\bar{q}(0) = 0,$$

可得

$$\begin{pmatrix} 2i\omega_* + d + \beta y_* & \beta x_* & 0 \\ -\sigma\beta y_* & 2i\omega_* + \delta + pz_* - \sigma\beta x_* & py_* \\ 0 & -\frac{kz_*e^{-2i\tau_*\omega_*}}{L + z_*} & 2i\omega_* - \frac{Lky_*e^{-2i\tau_*\omega_*}}{(L + z_*)^2} \end{pmatrix} E_1 = 2\alpha\beta \begin{pmatrix} -1 \\ \sigma - p \\ kL^{-1}e^{-2i\tau_*\omega_*} \end{pmatrix}.$$

解之得

$$E_1^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & \beta x_* & 0 \\ \sigma - p & 2i\omega_* + \delta + pz_* - \sigma\beta x_* & py_* \\ kL^{-1}e^{-2i\tau_*\omega_*} & -\frac{kz_*e^{-2i\tau_*\omega_*}}{L + z_*} & 2i\omega_* - \frac{Lky_*e^{-2i\tau_*\omega_*}}{(L + z_*)^2} \end{vmatrix}}{A},$$

$$E_1^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} 2i\omega_* + d + \beta y_* & -1 & 0 \\ -\sigma\beta y_* & \sigma - p & py_* \\ 0 & kL^{-1}e^{-2i\tau_*\omega_*} & 2i\omega_* - \frac{Lky_*e^{-2i\tau_*\omega_*}}{(L+z_*)^2} \end{vmatrix}}{A},$$

$$E_1^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} 2i\omega_* + d + \beta y_* & \beta x_* & -1 \\ -\sigma\beta y_* & 2i\omega_* + \delta + pz_* - \sigma\beta x_* & \sigma - p \\ 0 & -\frac{kz_*e^{-2i\tau_*\omega_*}}{L+z_*} & kL^{-1}e^{-2i\tau_*\omega_*} \end{vmatrix}}{A},$$

其中,

$$A = \begin{vmatrix} 2i\omega_* + d + \beta y_* & \beta x_* & 0 \\ -\sigma\beta y_* & 2i\omega_* + \delta + pz_* - \sigma\beta x_* & py_* \\ 0 & -\frac{kz_*e^{-2i\tau_*\omega_*}}{L+z_*} & 2i\omega_* - \frac{Lky_*e^{-2i\tau_*\omega_*}}{(L+z_*)^2} \end{vmatrix}.$$

同理可求得

$$E_2^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} \beta \operatorname{Re}\{\alpha\} & -\beta x_* & 0 \\ p \operatorname{Re}\{\alpha\bar{\beta}\} - \sigma\beta \operatorname{Re}\{\alpha\} & \sigma\beta x_* - \delta - pz_* & -py_* \\ -kL^{-1} \operatorname{Re}\{\alpha\bar{\beta}\} & \frac{kz_*}{L+z_*} & \frac{Lky_*}{(L+z_*)^2} \end{vmatrix}}{B},$$

$$E_2^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} -d - \beta y_* & \beta \operatorname{Re}\{\alpha\} & 0 \\ \sigma\beta y_* & p \operatorname{Re}\{\alpha\bar{\beta}\} - \sigma\beta \operatorname{Re}\{\alpha\} & -py_* \\ 0 & -kL^{-1} \operatorname{Re}\{\alpha\bar{\beta}\} & \frac{Lky_*}{(L+z_*)^2} \end{vmatrix}}{B},$$

$$E_2^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} -d - \beta y_* & -\beta x_* & \beta \operatorname{Re}\{\alpha\} \\ \sigma\beta y_* & \sigma\beta x_* - \delta - pz_* & p \operatorname{Re}\{\alpha\bar{\beta}\} - \sigma\beta \operatorname{Re}\{\alpha\} \\ 0 & \frac{kz_*}{L+z_*} & -kL^{-1} \operatorname{Re}\{\alpha\bar{\beta}\} \end{vmatrix}}{B},$$

其中,

$$B = \begin{vmatrix} -d - \beta y_* & -\beta x_* & 0 \\ \sigma\beta y_* & \sigma\beta x_* - \delta - pz_* & -py_* \\ 0 & \frac{kz_*}{L+z_*} & \frac{Lky_*}{(L+z_*)^2} \end{vmatrix}.$$

这样就可以求得 g_{21} . 由文献[10]给出的规范型方法和中心流形理论, 定义

$C_1(0) = \frac{i}{2\omega_*\tau_*}(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + \frac{g_{21}}{2}$, $\beta_2 = 2\text{Re}(C_1(0))$, $\mu_2 = -\frac{\text{Re}(C_1(0))}{\text{Re}(\lambda'(\tau_*))}$. 它们决定了在临界值 τ_* 附近分支周期解的性质。 μ_2 决定了 Hopf 分支的分支方向: 当 $\mu_2 > 0$ ($\mu_2 < 0$) 时, 分支周期解是上临界的 (下临界的)。 β_2 决定了分支周期解的稳定性: 当 $\beta_2 < 0$ ($\beta_2 > 0$) 时, 在中心流形上分支是稳定的 (不稳定的)。

定理 3 如果 (H2) 成立且 $h'(\xi_k) \neq 0$, 则当 $\tau = \tau_k^j$ ($k=1,2,3; j=0,1,2,\dots$) 时, 系统 (2) 经历了 Hopf 分支。

- 1) 如果 $\mu_2 > 0$ ($\mu_2 < 0$), 则系统 (2) 在平衡点 S_0 附近的 Hopf 分支是上临界的 (下临界的);
- 2) 如果 $\beta_2 < 0$ ($\beta_2 > 0$), 则系统 (2) 的分支周期解是稳定的 (不稳定的)。

4 数值模拟

在系统 (2) 中取 $\mu = 20$, $b = 0.5$, $d = 0.8$, $p = 0.1$, $k = 0.2$, $L = 1$, $\beta = 0.015$, $\sigma = 0.9375$, $\delta = 0.25$, 计算可得系统 (2) 有三个平衡点 $S_1 = (25, 0, 0)$, $S_2 = (17.7778, 21.6667, 0)$ 和 $S_3 = (35.2768, 8.652, 2.4608)$ 。

本节只研究平衡点 S_2 . 计算可得 (H2) 满足, 方程 (5) 有一个正实根 $\omega_1 = 4.3043$. 再由式 (8) 可得

$$\tau_1^j = 1.1234 + 1.4597j, \quad \frac{d\text{Re}\lambda(\tau_1^j)}{d\tau} > 0. \tag{27}$$

因此, 由定理 1 和式 (27) 可得如下推论。

推论 假设 τ_j ($j=0,1,2,\dots$) 如式 (27) 所定义,

- 1) 当 $\tau \in [0, \tau_1^0)$ 时, 系统 (1) 的平衡点 S_2 是局部渐近稳定的 (如图 1 所示);
- 2) 当 $\tau \in [\tau_1^0, \infty)$ 时, 系统 (1) 的平衡点 S_2 是不稳定的 (如图 2 所示);
- 3) 当 $\tau = \tau_j$ ($j=0,1,2,\dots$) 时, 系统 (1) 在平衡点 S_2 经历了 Hopf 分支 (如图 3 所示)。

当 $\tau = 2.51$ 时, $\beta_2 = 2\text{Re}(C_1(0)) < 0$, $\mu_2 < 0$. 由推论 1 可得, 此时系统 (2) 在平衡点 S_2 处产生 Hopf 分支, 并且是下临界的和轨道渐近稳定的, 如图 3 所示; 当 $\tau = 24.5$ 时, 系统 (2) 的平衡点 S_2 是不稳定的, 且出现了混沌吸引子, 如图 2 所示。

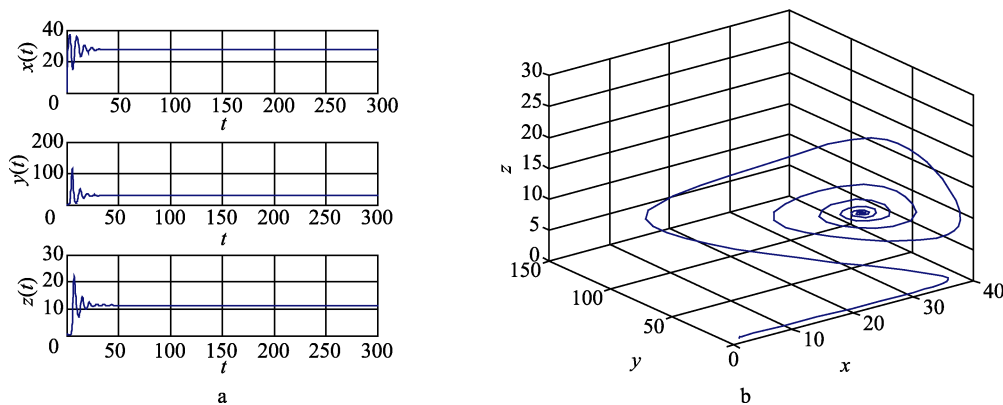


图 1 当 $\tau = 0.7$ 时, 系统 (2) 的波图 (a) 和相图 (b)

Fig. 1 Waveform plots (a) and phase (b) for system (2) with $\tau = 0.7$

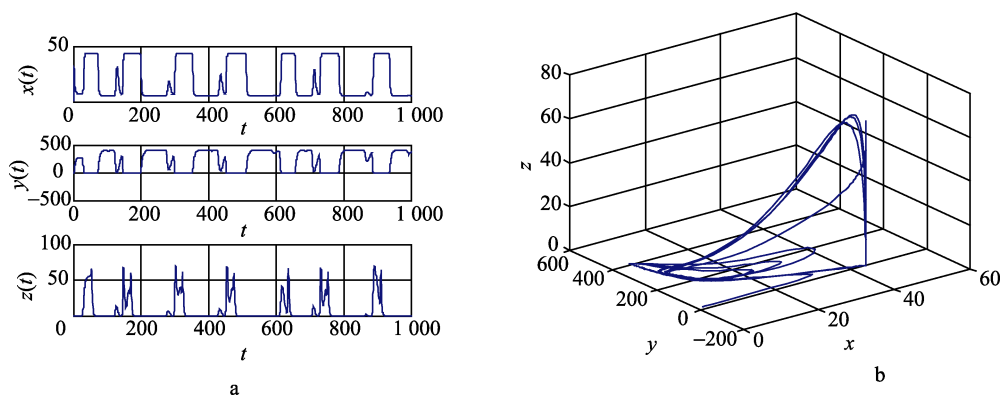


图 2 当 $\tau = 24.5$ 时, 系统 (2) 的波图 (a) 和相图 (b)
 Fig. 2 Waveform plots (a) and phase (b) for system (2) with $\tau = 24.5$

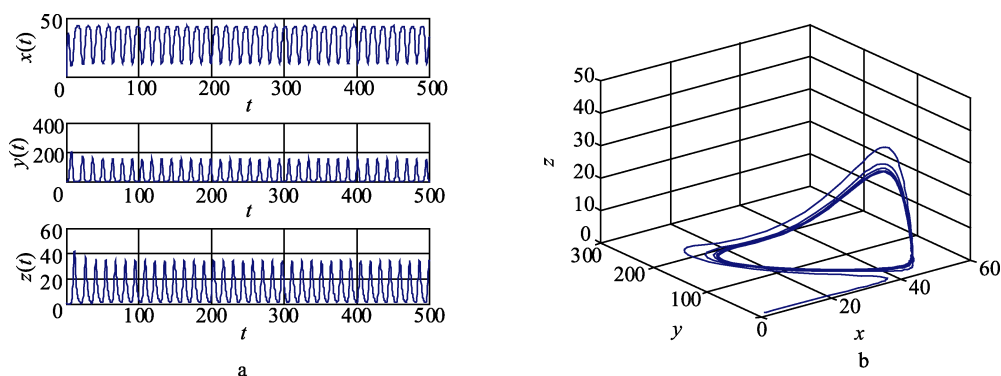


图 3 当 $\tau = 2.51$ 时, 系统 (2) 的波图 (a) 和相图 (b)
 Fig. 3 Waveform plots (a) and phase (b) for system (2) with $\tau = 2.51$

5 结论

研究了时滞 HTLV-I 病毒模型的动力学行为。首先, 以时滞 τ 为分支参数, 研究了该模型平衡点的稳定性与分支周期解的存在性。研究表明, 随着时滞 τ 的变化, 模型平衡点的稳定性会改变, 而且会出现分支周期解。这意味着时滞 τ 必须保持在一个适当的范围, 以确保该病毒不会快速地传播。其次, 给出了分支周期解的性质, 以更准确地了解该病毒的传播规律。这些研究结果可为有关部门的决策提供理论参考。

[参考文献] (References)

- [1] LI M Y, SHU H Y. Global dynamics of a mathematical model for HTLV-I infection of CD4⁺ T cells with delayed CTL response[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2012, 13(3): 1080-1092.
- [2] LI S M, ZHOU Y C. Global dynamics of an HTLV-1 model with cell-to-cell infection and mitosis[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 2014: 1-12.
- [3] LANG J, LI M Y. Stable and transient periodic oscillations in a mathematical model for CTL response to HTLV-I infection[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2012, 65(1): 181-199.
- [4] GÓMEZ-ACEVEDO H, LI M Y, JACOBSEN S. Multi-stability in a model for CTL response to HTLV-I infection and its

- consequences in HAM/TSP development and prevention[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2010, 72(3): 681-696.
- [5] 杨纪华, 刘媚. 具时滞倒立摆系统的稳定性与 Hopf 分支分析[J]. *黑龙江大学自然科学学报*, 2014, 31 (2): 185-191.
YANG J H, LIU M. Stability and Hopf bifurcation analysis of inverted pendulum system with time delay[J]. *Journal of Natural Science of Heilongjiang Unibersity*, 2014, 31(2): 185-191. (in Chinese)
- [6] WANG H B, JIANG W H. Multiple stability analysis in a magnetic bearing system with time delay[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 27(3): 789-799.
- [7] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性方法与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
MA Z E, ZHOU Y C. Qualitative and stability method of ordinary differential equations[M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese)
- [8] SONG Y L, WEI J J. Bifurcation analysis for Chen's system with delayed feedback and its application to control of chaos[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 22(1): 75-91.
- [9] HALE J K, LUNEL S V. Introduction to functional differential equation[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [10] HASSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y H. Theory and applications of Hopf bifurcation[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.