

非线性金融系统的分支分析与时滞反馈控制

杨纪华¹, 张二丽², 刘 媚¹

(1. 宁夏师范学院数学与计算机科学学院, 宁夏固原 756002;

2. 郑州财经学院信息工程学院, 郑州 450044)

摘要: 主要研究非线性金融系统的分支与混沌控制问题。首先, 应用特征方程根的分布理论, 得到金融系统的线性稳定性区域以及 Hopf 分支存在的条件。然后, 应用时滞反馈控制方法分析金融系统的混沌控制问题, 通过设计合适的反馈增益与时滞, 混沌振荡转变为稳定的平衡点或周期轨。最后, 采用数值模拟验证了理论结果。

关键词: 应用数学; 稳定性; Hopf 分支; 混沌; 时滞反馈控制

中图分类号: O175.13 **文献标识码:** A **文章编号:** 1674-2850(2016)19-1973-07

Bifurcation analysis and delayed feedback control of nonlinear finance system

YANG Jihua¹, ZHANG Erli², LIU Mei¹

(1. *School of Mathematics and Computer Science, Ningxia Normal University, Guyuan, Ningxia 756002, China;*

2. *School of Information Engineering, Zhengzhou Institute of Finance and Economics, Zhengzhou 450044, China*)

Abstract: In this paper, the bifurcation and chaos control of nonlinear finance system were investigated. Firstly, by using the distribution theory of roots to the associate characteristic equation, we obtained the linear stable region of finance system and the conditions of ensuring the existence of Hopf bifurcation. Then we analyzed the chaos control of finance system by using delayed feedback control method. By designing appropriate feedback strength and delay, chaotic oscillation was converted into stable equilibrium or periodic orbit. Finally, some numerical simulations were carried out to support the analytic results.

Key words: applied mathematics; stability; Hopf bifurcation; chaos; delayed feedback control

0 引言

经济学中的混沌现象自 1985 年首次被发现以来, 对当今西方主流经济学派产生了巨大的冲击, 因为经济系统中出现混沌现象意味着宏观经济运动本身具有内在的不稳定性^[1~3]。政府虽然可以采取财经政策或金融政策等宏观调控手段进行干预, 但是干预的有效性十分有限, 不稳定性与复杂性使精确的经济预测受到很大限制, 合理的预期行为也变得复杂起来^[4]。因此, 系统深入地开展对这类复杂经济系统内在结构特征的研究, 通过研究系统周期解的失稳、分支、各分支点值的位置、复杂系统进入混沌的道路, 从而揭示复杂现象发生的原因, 变得越来越重要。并在此基础上, 为复杂连续经济系统的分析、预测与

基金项目: 国家自然科学基金 (11361046); 宁夏科技支撑计划 (宁科计字[2015]26(4)); 宁夏自然科学基金 (NZ13213); 河南省高等学校重点科研项目 (16A110038, 17B110003); 宁夏高等学校科研项目 (NGY2014126, Ngy2015115)

作者简介: 杨纪华 (1983—), 男, 讲师, 主要研究方向: 微分方程的稳定性与分支理论. E-mail: jihua1113@163.com

控制提供理论依据与实际操作的方法。

学者们研究了各类非线性金融模型。例如，受迫 van der Pol 商业模型^[5]、动态 IS-LM 模型^[6]、Kaldorian 模型^[7]等。ZHANG^[8]于 2012 年提出了金融模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -a[x(t) + y(t)], \\ \dot{y}(t) = -y(t) - ax(t)z(t), \\ \dot{z}(t) = b + ax(t)y(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中， $x(t)$ 为利率； $y(t)$ 为投资需求； $z(t)$ 为价格指数； a 为储蓄量， $a > 0$ ； b 为单位投资成本， $b > 0$ 。当 $a=1.8$ 、 $b=4$ 时，系统 (1) 出现混沌吸引子，如图 1 所示。

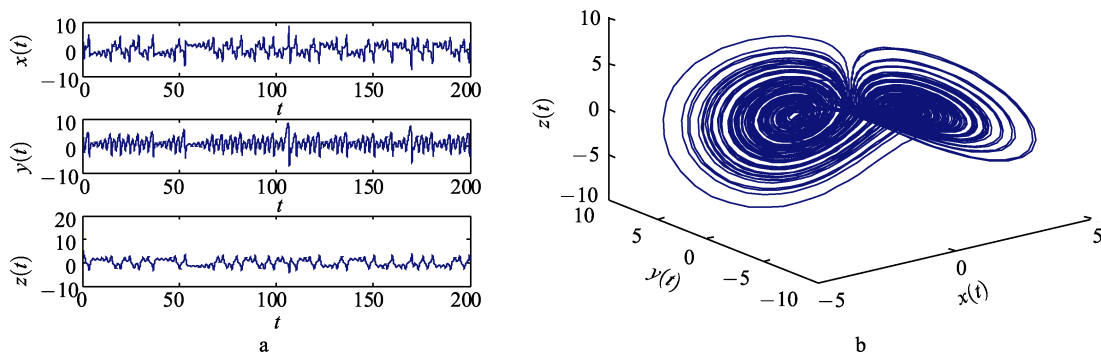


图 1 当 $a=1.8$ 、 $b=4$ 时，系统 (1) 的波图 (a) 和相图 (b)

Fig. 1 Waveform plot (a) and phase plot (b) for system (1) with $a=1.8$, $b=4$

受文献^[4]和文献^[8]的启发，本文应用时滞反馈控制方法研究系统 (1) 的混沌控制问题。对于金融模型 (1)，在价格指数变化率上增加时滞反馈控制项 $k[z(t) - z(t - \tau)]$ ，得到新模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -a[x(t) + y(t)], \\ \dot{y}(t) = -y(t) - ax(t)z(t), \\ \dot{z}(t) = b + ax(t)y(t) + k[z(t) - z(t - \tau)], \end{cases} \quad (2)$$

其中， k 为反馈增益； τ 为正时滞。

1 平衡点的稳定性与 Hopf 分支的存在性

本节研究时滞对系统 (2) 动力学行为的影响。系统 (2) 有两个平衡点 $S_1 = (\sqrt{b/a}, -\sqrt{b/a}, 1/a)$ 和 $S_2 = (-\sqrt{b/a}, \sqrt{b/a}, 1/a)$ 。显然，系统 (2) 与系统 (1) 有相同的平衡点。

不失一般性，本文只研究平衡点 S_1 。系统 (2) 在平衡点 S_1 处的特征方程为

$$\lambda^3 + (1 + a - k)\lambda^2 + (ab - k - ak)\lambda + 2a^2b + k[\lambda^2 + (1 + a)\lambda]e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (3)$$

当 $\tau=0$ 时，由 Routh-Hurwitz 判据^[9]，可以得到如下引理。

- 引理 1** 1) 当 $a < 1$ 时，方程 (3) 的所有根具有负实部，即系统 (2) 的平衡点 S_1 是局部渐近稳定的；
 2) 当 $a = 1$ 时，方程 (3) 有一对纯虚根 $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{b}$ 和一个负实根 $\lambda_3 = -2$ ，且 $\text{Re} \lambda'(a)|_{a=1} > 0$ ，此时系统 (2)

在平衡点 S_1 处经历了 Hopf 分支; 3) 当 $a > 1$ 时, 方程 (3) 有一个负根和一对具有正实部的共轭虚根, 即系统 (2) 的平衡点 S_1 是不稳定的。

设 $i\omega (\omega > 0)$ 是方程 (3) 的根, 将其代入方程 (3) 并分离实部和虚部可得

$$\begin{cases} \omega^3 - (1+a-k)\omega = k\omega^2 \sin \omega\tau + k(1+a)\omega \cos \omega\tau, \\ (1+a-k)\omega^2 - 2a^2b = -k\omega^2 \cos \omega\tau + k(1+a)\omega \sin \omega\tau. \end{cases} \quad (4)$$

将式 (4) 中两个方程平方相加可得

$$\omega^6 + p\omega^4 + q\omega^2 + r = 0, \quad (5)$$

其中, $p = (a+1)^2 - 2ab$; $q = ab(ab + 2ak - 2k - 4a - 4a^2)$; $r = 4a^4b^2$.

令 $\xi = \omega^2$, 方程 (5) 化为

$$\xi^3 + p\xi^2 + q\xi + r = 0, \quad (6)$$

记

$$h(\xi) = \xi^3 + p\xi^2 + q\xi + r. \quad (7)$$

类似于文献[10]中的引理 6, 可得如下引理。

引理 2 1) 若 $p^2 \leq 3q$, 则方程 (6) 没有正实根; 2) 若 $p^2 > 3q$, 则方程 (6) 有正实根的充要条件为 $\xi_1 > 0$, $h(\xi_1) \leq 0$, 其中 $\xi_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 3q}}{3}$. 为方便, 作如下假设

(H1) $p^2 \leq 3q$; (H2) $p^2 > 3q$, $\xi_1 > 0$, $h(\xi_1) \leq 0$.

不失一般性, 假设方程 (6) 有 3 个正实根 ξ_1, ξ_2 和 ξ_3 . 则方程 (7) 有 3 个正实根 $\omega_k = \sqrt{\xi_k}$ ($k=1,2,3$). 记

$$\tau_k^j = \begin{cases} \frac{1}{\omega_k}(\arccos A + 2j\pi), & B \geq 0, \\ \frac{1}{\omega_k}[2(j+1)\pi - \arccos A], & B < 0, \end{cases} \quad (8)$$

其中,

$$A = \cos \omega_k \tau_k = \frac{k\omega_k^2 + a^2b - ab + k(a+1)^2}{k[\omega_k^2 + (1+a)^2]};$$

$$B = \sin \omega_k \tau_k = \frac{\omega_k^4 + [(a+1)^2 - ab]\omega_k^2 - 2a^2b(a+1)}{k\omega_k[\omega_k^2 + (1+a)^2]}; \quad k=1,2,3; \quad j=0,1,2,\dots$$

当 $\tau = \tau_k^j$ 时, 方程 (3) 有一对纯虚根 $\pm i\omega_k$. 定义

$$\tau_0 = \tau_{k_0}^0 = \min_{k \in \{1,2,3\}} \{\tau_k^0\}, \quad \omega_0 = \omega_{k_0}. \quad (9)$$

令 $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\omega(\tau)$ 是方程 (3) 的根, 且满足 $\alpha(\tau_k^j) = 0$, $\omega(\tau_k^j) = \omega_k$ ($k=1,2,3$).

引理 3 如果 $h'(\xi_k) \neq 0$, 则 $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau)}{d \tau} \right|_{\tau=\tau_k^j} \neq 0$, 且 $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau)}{d \tau} \right|_{\tau=\tau_k^j}$ 与 $h'(\xi_k)$ 符号相同。

证明：将 $\lambda(\tau)$ 代入方程 (3), 两端关于 τ 求导可得

$$\left[\frac{d \lambda(\tau)}{d \tau} \right]^{-1} = \frac{[3 \lambda^2 + 2(1+a-k)\lambda + ab - k - ak]e^{\lambda \tau}}{k \lambda^2 (\lambda + 1 + a)} + \frac{2 \lambda + 1 + a}{\lambda^2 (\lambda + 1 + a)} - \frac{\tau}{\lambda}. \quad (10)$$

将 $\tau = \tau_k^j$ 代入式 (10), 并结合式 (4) 可得

$$\begin{aligned} \left[\frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau)}{d \tau} \right]_{\tau=\tau_k^j}^{-1} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{[3 \lambda^2 + 2(1+a-k)\lambda + ab - k - ak]e^{\lambda \tau}}{k \lambda^2 (\lambda + 1 + a)} \right\}_{\tau=\tau_k^j} + \operatorname{Re} \left[\frac{2 \lambda + 1 + a}{\lambda^2 (\lambda + 1 + a)} \right]_{\tau=\tau_k^j} \\ &= \frac{1}{\Lambda} \{ (k + ak - ab + 3\omega_k^2) \omega_k [k \omega_k^2 \sin \omega_k \tau_k^j + k(1+a) \omega_k \cos \omega_k \tau_k^j] - \\ &\quad 2(1+a-k) [k \omega_k^2 \cos \omega_k \tau_k^j + k(a+1) \sin \omega_k \tau_k^j] - k^2 (a+1)^2 - 2k^2 \omega_k^4 \} \\ &= \frac{1}{\Lambda} (3\omega_k^6 + 2p\omega_k^4 + q\omega_k^2) = \frac{\xi_k}{\Lambda} (3\xi_k^3 + 2p\xi_k^2 + q) = \frac{\xi_k}{\Lambda} h'(\xi_k), \end{aligned}$$

其中, $\Lambda = k^2 \omega_k^4 [\omega_k^2 + (1+a)^2]$. 因为 $\xi_k > 0$, $\Lambda > 0$, 且 $h'(\xi_k) \neq 0$, 所以 $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau)}{d \tau} \right|_{\tau=\tau_k^j} \neq 0$, 且 $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau)}{d \tau} \right|_{\tau=\tau_k^j}$

与 $h'(\xi_k)$ 符号相同。引理 3 得证。

由本文引理 1 至引理 3, 以及文献[11]中的推论 2.4, 可得如下定理。

定理 1 1) 如果 $a < 1$ ($a > 1$), 且 (H1) 成立, 则当 $\tau \geq 0$ 时, 系统 (2) 的平衡点 S_1 是渐近 (不) 稳定的; 2) 如果 $a < 1$ ($a > 1$), 且 (H2) 成立, 则当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时, 系统 (2) 的平衡点 S_1 是渐近 (不) 稳定的; 3) 如果 $a \neq 1$, 且 (H2) 成立, 则随着 τ 的增加, 将出现一系列稳定性开关, 而且如果 $h'(\xi_k) \neq 0$, 当 $\tau = \tau_k^j$ ($k=1,2,3; j=0,1,2,\dots$) 时, 系统 (2) 在平衡点 S_1 附近经历 Hopf 分支。

2 数值模拟

在系统 (2) 中取 $a=1.8, b=4$, 易知系统 (2) 的两个平衡点为 $S_1=(1.4907, -1.4907, 0.7454)$ 和 $S_2=(-1.4907, 1.4907, 0.7454)$. 显然, 当 $\tau=0$ 或 $k=0$ 时, 系统 (2) 出现混沌吸引子 (如图 1 所示)。

由第 1 节的讨论可选取 $k=-10$, 计算可得方程 (5) 有两个正实根 $\omega_1 \approx 10.4365$ 和 $\omega_2 \approx 6.3159$. 由式 (8) 和引理 3 可得

$$\begin{aligned} \tau_1^j &= 1.5529 + 1.9449j \quad (j=0,1,2,\dots), \quad \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau_1^j)}{d \tau} > 0, \\ \tau_2^j &= 0.4692 + 2.5002j \quad (j=0,1,2,\dots), \quad \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau_2^j)}{d \tau} < 0. \end{aligned} \quad (11)$$

根据定理 1 可得如下结论。

结论 假设 τ_k^j ($k=1,2; j=0,1,2,\dots$) 如式 (11) 定义, 则

1) 当 $\tau \in [0, \tau_2^0) \cup (\tau_1^0, \tau_2^1) \cup (\tau_1^1, +\infty)$ 时, 系统 (2) 的平衡点 S_1 是不稳定的 (如图 2 和图 3 所示);

2) 当 $\tau \in (\tau_2^0, \tau_1^0) \cup (\tau_2^1, \tau_1^1)$ 时, 系统 (2) 的平衡点 S_1 是渐近稳定的 (如图 4 和图 5 所示);

3) 当 $\tau = \tau_k^j$ ($k=1,2; j=0,1,2,\dots$) 时, 系统 (2) 在平衡点 S_1 处经历 Hopf 分支 (如图 6 和图 7 所示)。

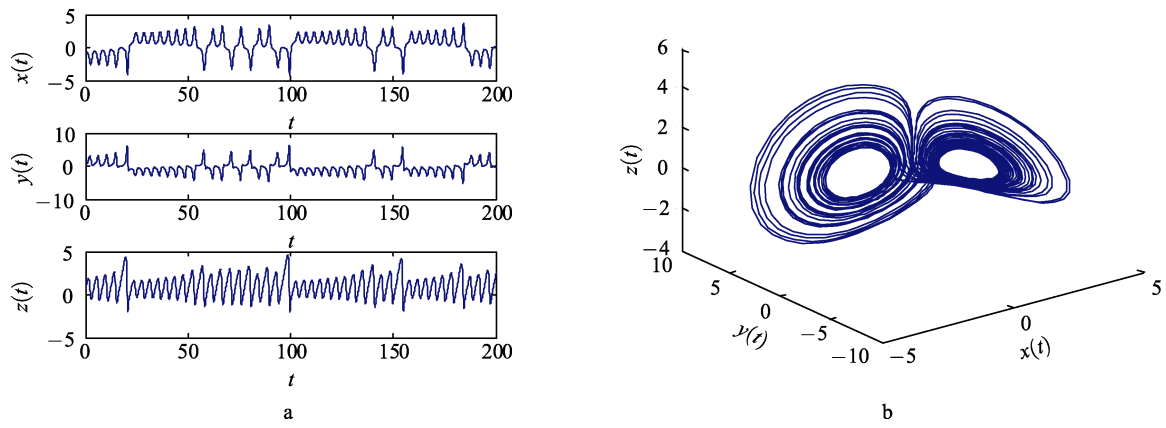


图 2 当 $\tau = 0.20$ 时, 系统 (2) 的波图 (a) 和相图 (b)
 Fig. 2 Waveform plot (a) and phase plot (b) for system (2) with $\tau = 0.20$

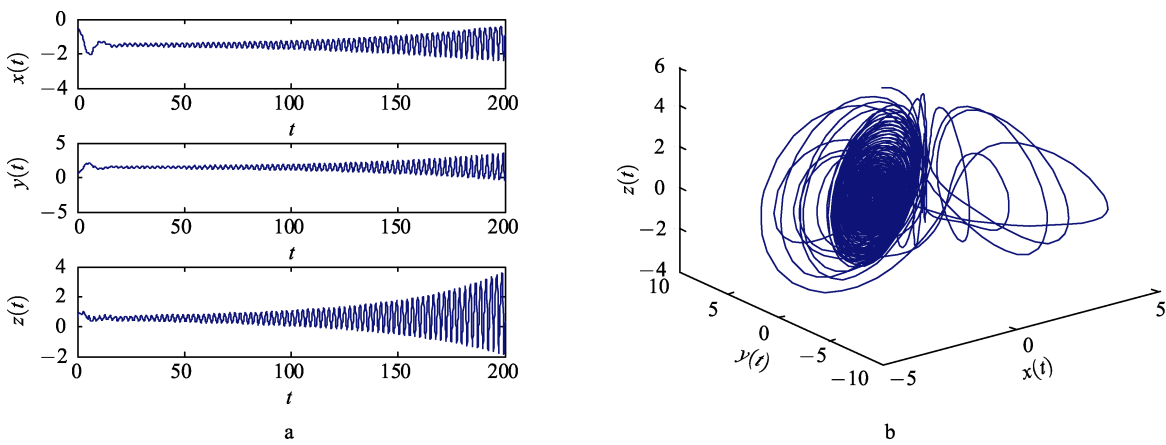


图 3 当 $\tau = 2.46$ 时, 系统 (2) 的波图 (a) 和相图 (b)
 Fig. 3 Waveform plot (a) and phase plot (b) for system (2) with $\tau = 2.46$

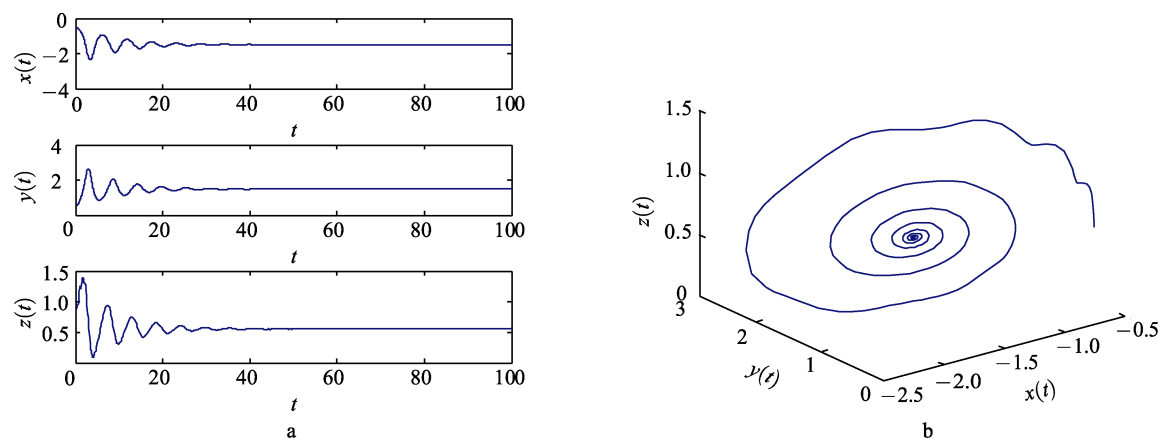


图 4 当 $\tau = 0.60$ 时, 系统 (2) 的波图 (a) 和相图 (b)
 Fig. 4 Waveform plot (a) and phase plot (b) for system (2) with $\tau = 0.60$

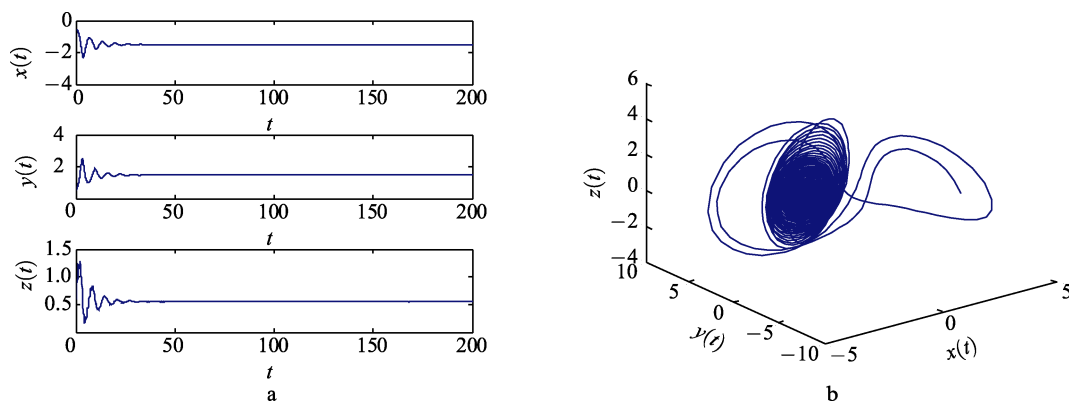


图5 当 $\tau = 3.12$ 时，系统 (2) 的波图 (a) 和相图 (b)

Fig. 5 Waveform plot (a) and phase plot (b) for system (2) with $\tau = 3.12$

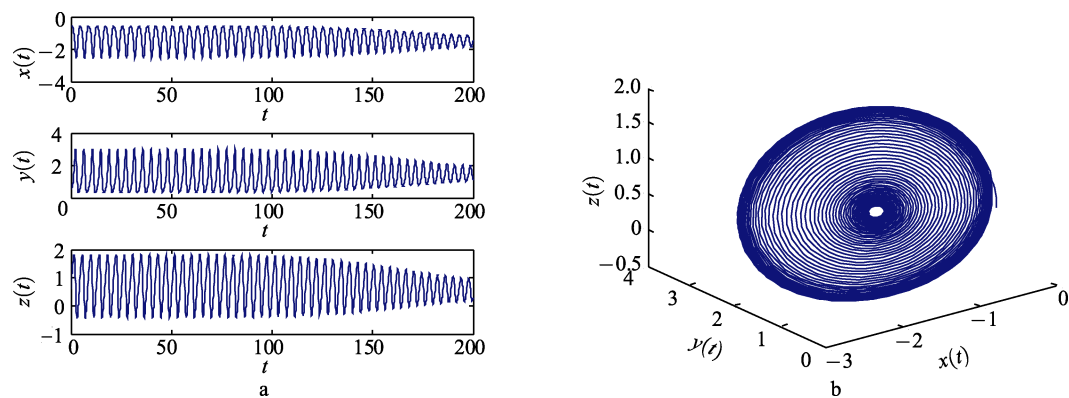


图6 当 $\tau = 0.46$ 时，系统 (2) 的波图 (a) 和相图 (b)

Fig. 6 Waveform plot (a) and phase plot (b) for system (2) with $\tau = 0.46$

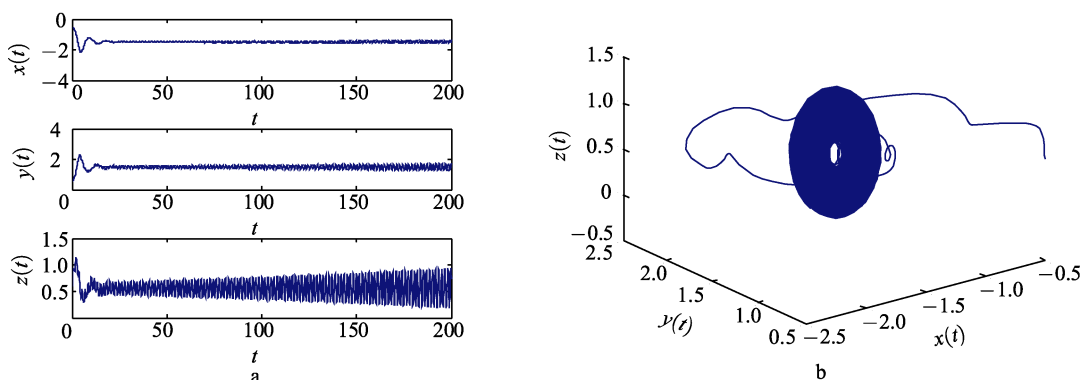


图7 当 $\tau = 1.56$ 时，系统 (2) 的波图 (a) 和相图 (b)

Fig. 7 Waveform plot (a) and phase plot (b) for system (2) with $\tau = 1.56$

3 结论

应用时滞反馈控制方法研究了非线性金融系统的动力学行为。以时滞 τ 为分支参数，研究了该模型平衡点的稳定性与分支周期解的存在性。理论研究结果与数值模拟表明，当在价格指数的变化率上增加时滞反馈项 $k[z(t) - z(t - \tau)]$ 时，混沌吸引子可以控制为稳定的平衡点或周期解，这意味着金融市场将趋向于稳定的平衡状态或按照一种周期的方式稳定运行。这两种状态均可以预测金融市场未来的发展状况，

是所希望进行的理想状态。这些研究结果可以为有关部门的决策提供理论参考。

[参考文献] (References)

- [1] WANG Z, HUANG X, SHI G D. Analysis of nonlinear dynamics and chaos in a fractional order financial system with time delay[J]. *Comput. Math. Appl.*, 2011, 62(3): 1531-1539.
- [2] CHEN X L, LIU H H, XU C L. The new result on delayed finance system[J]. *Nonlinear Dyn.*, 2014, 78(3): 1989-1998.
- [3] ZHAO X S, LI Z B, LI S. Synchronization of a chaotic finance system[J]. *Appl. Math. Comput.*, 2011, 217(13): 6031-6039.
- [4] DING Y T, JIANG W H, WANG H B. Hopf-pichfork bifurcation and periodic phenomena in nonlinear financial system with delay[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2012, 45(8): 1048-1057.
- [5] CHIAN A C, REMPEL E L, ROGERS C. Complex economic dynamics: chaotic saddle, crisis and intermittency[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, 29(5): 1194-1218.
- [6] CESARE L D, SPORTELLI M. A dynamic IS-LM model with delayed taxation revenues[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 25(1): 233-244.
- [7] LORENZ H W. *Nonlinear dynamics economic and chaotic motion*[M]. New York: Springer, 1993.
- [8] ZHANG R Y. Bifurcation analysis for a kind of nonlinear finance system with delayed feedback and its application to control chaos[J]. *J. App. Math.*, 2012: 1-18.
- [9] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性方法与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
MA Z E, ZHOU Y C. *Qualitative and stability method of ordinary differential equations*[M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese)
- [10] SONG Y L, WEI J J. Bifurcation analysis for Chen's system with delayed feedback and its application to control of chaos[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 22(1): 75-91.
- [11] RUAN S G, WEI J J. On the zeros of transcendental functions to stability of delay differential equations with two delays[J]. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Math. Anal.*, 2003, 10(6): 863-874.