

多分辨率平面单元有限元法

夏逸鸣

(南京航空航天大学航空宇航学院, 南京 210016)

摘要: 基于传统平面应力单元节点形函数, 通过对形函数关于坐标零点的延拓, 形成单元的基本节点形函数; 并将基本节点形函数在单元区域上进行伸缩和平移, 由此生成相互嵌套、逐级包含的位移子空间序列, 即多分辨率分析 (multiresolution analysis, MRA) 的简单而明晰的数学基础。由此, 建立了带有分辨率常数的理性多分辨率分析的概念; 并在此基础上, 构建多分辨率平面单元和相应的有限元法。该单元为无网格单元, 具有如下特性: 1) 可通过自由调节单元分辨率 (resolution level, RL) 的大小来增减单元内的节点数量, 从而调整单元计算的清晰度, 结构整体分析可由数个多分辨率单元经拼接而实现, 因此, 结构分析的清晰度是由分辨率决定的而不是网格; 2) 经重新排布节点后的单元整体刚度、等效节点荷载向量可按节点直接获得, 不像传统单元那样需要人工重新生成; 3) 与传统单元一样可以很方便地处理各种边界条件。因此, 传统平面单元有限元方法本质上是一种单分辨率单元有限元方法, 为本文多分辨率单元有限元方法的特例。

关键词: 应用数学; 平面单元; 基本节点形函数; 伸缩和平移; 位移子空间序列; 理性多分辨率

中图分类号: O242 **文献标识码:** A **文章编号:** 1674-2850(2016)01-0093-08

A multiresolution finite element method based on a new plane element

XIA Yiming

(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Based on a node shape function for the plane stress element, the basic node shape function is constructed by extending the node shape function to other three quadrants around the coordinate zero point and a mutually nesting displacement subspace sequence is constituted out of scaling and shifting of the basic node shape function on the element domain, which brings about a simple, clear and rigorous mathematical basis for the multiresolution analysis (MRA). After that, the multiresolution plane stress element and method is formulated through applying the minimum potential energy principle. Hence, the MRA concept is established and the resolution level (RL) for the element is introduced. Hence, the proposed element is a meshless one and possesses the following features: 1) the node number the element contains can be modulated by adjusting the RL, thus improving the element analysis clarity. The overall analysis of a structure can be executed through splicing elements, hence the analysis clarity being actually determined by the RL, not by the mesh. 2) The element stiffness matrix, node equivalent loading vector can be automatically acquired for the proposed while those being obtained by artificially reassembling for the traditional after the node layout is reset. 3) The boundary conditions can be conveniently handled by the proposed just as those by the traditional. As a result, traditional 4-node plane stress element and method is essentially a mono-resolution one and also a special case of the proposed element and method.

Key words: applied mathematics; plane element; basic node shape function; scaling and shifting; mutually nesting displacement subspace sequence; rational multiresolution analysis

0 引言

有限元方法是一种强大的数值计算工具,其在偏微分方程求解、工程结构计算以及热动力学分析等领域都得到了广泛的应用。但是,当遇到材料非线性、局部损伤、裂纹、突变或接触等大梯度问题时,有限元法就会产生诸如计算分析结果不准确、需要重新划分有限元网格,甚至出现病态单元等问题^[1]。

为有效解决工程计算中存在的问题,近30多年来,国内外学者相继提出了各种有限元方法,如多重网格法^[2~3]、自适应方法^[4~5]、多尺度有限体积法^[6~7]、多尺度有限元法^[8~9]、小波有限元法^[1,10]以及无网格法^[11~12]等,其中,自适应有限元法应用研究较为广泛,小波有限元法、无网格法也逐渐成为近年来的研究热点。

自适应方法大致分为 h 类型、 p 类型和 r 类型3类。 h 类型主要通过网格的局部加密或粗化来实现,使用后验误差估计作为操作的判断标准; p 类型在误差较大时通过增加插值函数的次数来提高计算精度; r 类型在保持原有网格拓扑结构不变的条件下,移动网格节点,通过极小化能量泛函,将网格移动到误差较大区域。针对具体问题,自适应方法可以是各种类型的结合。但是,对于工程中的具体问题,即使是经验丰富的技术人员要选择合适的网格方案也很困难,往往需要多次反复才能达到指定的求解精度。

小波有限元法是采用各种不同的小波尺度函数或小波函数作为插值形函数,并根据小波多分辨理论^[1,10],通过位移尺度空间随尺度变化而伸缩,以调整单元网格划分,从而达到自适应计算的目的。但是,根据小波多分辨理论,其尺度空间的伸缩是基于小波空间(误差空间)与前一尺度空间的直和,并由此形成相互包含、嵌套的多尺度空间序列,而此小波空间的构建须满足一定的假设条件,即小波空间与同阶的尺度空间正交。由此构造出的小波空间,因在绝大多数情况下与实际结构计算分析的真实误差空间并不相一致,而导致产生与实际不符的尺度空间序列;另外,现有的小波有限元法其节点参数的物理意义不明确^[10],需要借助基底函数系数与待求物理参数之间的转换矩阵关系,来确保单元公共边界的连续性,而转换矩阵的求解涉及矩阵的求逆,对于较大尺度问题容易出现数值不稳定现象。

无网格法通过节点信息建立插值基函数,插值函数不依赖于节点之间的有序拓扑连接,克服了传统方法对网格的依赖性,便于自适应计算,在涉及网格畸变、大变形及断裂等问题中显示出明显的优势。但是,由于该法用于建立位移场的考虑周围区域节点影响的插值基函数是由基函数和权函数所构成,其系数多而复杂,因此,相比传统有限元法,该法计算效率较低。

针对有限元自适应网格划分、小波有限元法多分辨分析以及无网格法中所存在的问题,提出多分辨率有限元方法,该法通过延拓节点形函数,直接连接临近相关节点,而无须像无网格法那样构造考虑影响域大小的权函数。并在此基础上,采用形函数在单元区域上进行收缩和平移的方法,构造了一个基函数系,从而构建了一个位移子空间序列,由此形成了一个崭新的多分辨分析,它可以通过调节单元分辨率的大小来自由调整节点的疏密分布,从而便于实现自适应网格划分,同时又使其具有理性成分;并且,可以通过基本节点形函数,将调整后的任意多个节点自动地合并为原单元,因此,与传统有限元法比较,其具有较高的计算效率。这里就有限元中的基本单元——平面单元进行多分辨分析计算的公式推导,并结合算例说明,该法可以弥补自适应、小波有限元和无网格法的不足,为解决工程中平面结构的大梯度等问题提供了强有力的工具。

1 基本节点形函数

如图1所示,在直角坐标系下,4节点平面应力单元内任意一点沿 x, y 方向的位移 u, v 可写为

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^4 N_i^m u_i, \\ v = \sum_{i=1}^4 N_i^m v_i, \end{cases} \quad (1)$$

其中, u_i, v_i 分别为单元节点 i 沿 x, y 方向的位移;
 N_i^m 为单元节点 i 的形函数, 其在自然坐标系下, 可以双线性函数表示为

$$\begin{cases} N_1^m(\xi, \eta) = (1-\xi)(1-\eta), \\ N_2^m(\xi, \eta) = \xi(1-\eta), \\ N_3^m(\xi, \eta) = \xi\eta, \\ N_4^m(\xi, \eta) = (1-\xi)\eta, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}, a, b$ 分别为单元的长和宽, $\xi \in [0,1], \eta \in [0,1]$.

如图 2、图 3 所示, 将单元节点①的形函数域由 $[0,1] \times [0,1]$ 扩展到 $[-1,1] \times [-1,1]$, 其具体扩展方法为: 在自然坐标系下, 将原单元分别沿水平、垂直和斜向移动到坐标系中的其他 3 个象限中, 同时, 单元节点也跟随移动 (如图 3 所示), 由此形成关于坐标点 $(0,0)$ 的基本节点形函数, 其可定义为

$$\varphi(\xi, \eta) := \begin{cases} N_1^m(\xi, \eta), & \xi \in [0,1], \eta \in [0,1]; \\ N_2^m(1+\xi, \eta), & \xi \in [-1,0], \eta \in [0,1]; \\ N_3^m(1+\xi, 1+\eta), & \xi \in [-1,0], \eta \in [-1,0]; \\ N_4^m(\xi, 1+\eta), & \xi \in [0,1], \eta \in [-1,0]; \\ 0, & \xi \notin [-1,1], \eta \notin [-1,1]. \end{cases} \quad (3)$$

基本节点形函数 $\varphi(\xi, \eta)$ 具有如下 Kronecker delta 特性:

$$\varphi(0,0) = 1, \varphi(8nodes) = 0. \quad (4)$$

基本节点形函数 $\varphi(\xi, \eta)$ 的形状如图 4 所示, 显然, 该形函数满足位移连续条件。

2 位移子空间序列

若要实现多分辨率的计算分析, 就必须构建单元的多分辨率位移子空间序列。通过函数的伸缩、平移可以组建子空间序列基底函数系。由此, 将基本节点形函数在区间上进行伸缩、平移, 由此形成单元的多分辨率位移子空间序列的基底函数向量 Ψ_{mn}^e , 对于单元区域为 $[1,0] \times [1,0]$ 的平板, 当 RL 为 $(m+1) \times (n+1)$ 时, Ψ_{mn}^e 可以取为

$$\Psi_{mn}^e = [\Phi_{mn,00}^e, \dots, \Phi_{mn,rs}^e, \dots, \Phi_{mn,mm}^e], \quad (5)$$

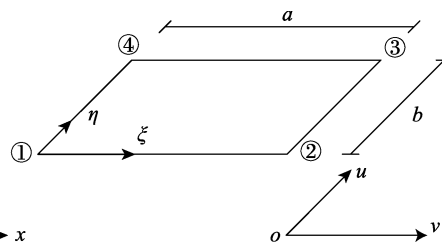


图 1 平面单元

Fig. 1 Plane element

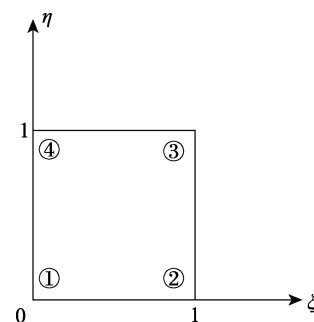


图 2 原节点形函数单元域

Fig. 2 Domain of a node shape function

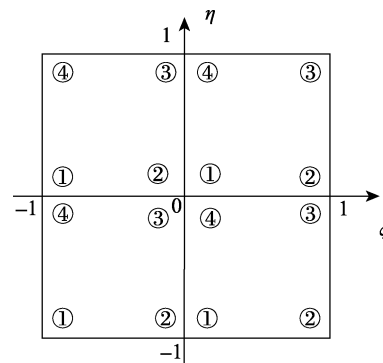


图 3 延拓后基本节点形函数域

Fig. 3 Extended domain of a basic node shape function

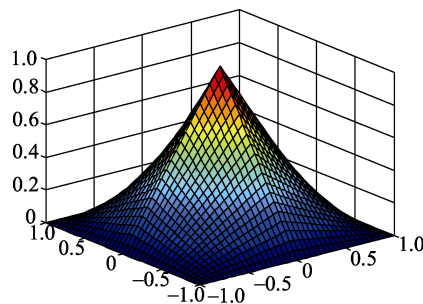


图 4 基本节点形函数 $\varphi(\xi, \eta)$

Fig. 4 Basic node shape function $\varphi(\xi, \eta)$

其中, $\Phi_{mn}^e = \begin{bmatrix} \varphi_{mn,rs} & 0 \\ 0 & \varphi_{mn,rs} \end{bmatrix}$, $\varphi_{mn,rs} = \varphi(m\xi - r, n\eta - s)$, m, n 均为正整数, 分别表示 2 个方向上的伸缩倍数; $r=0, 1, 2, \dots, m; s=0, 1, 2, \dots, n$, 表示节点位置平移的参数; 这里, $(m\xi - r) \in [-1, 1], (n\eta - s) \in [-1, 1], \xi \in [0, 1], \eta \in [0, 1]$.

首先, 将基本节点形函数在区间 $[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] \times [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ 上进行伸缩, 然后把经过伸缩的形函数平移至单元区域上的所有节点 $(\frac{r}{m}, \frac{s}{n})$ 处, 由此, 即可构造出单元区域内各个节点的形函数。当单元分辨率为 $2 \times 2, 3 \times 3$ 时, 节点基本形函数在区间 $[0, 1]$ 上平移所生成的各个节点形函数, 如图 5 所示。

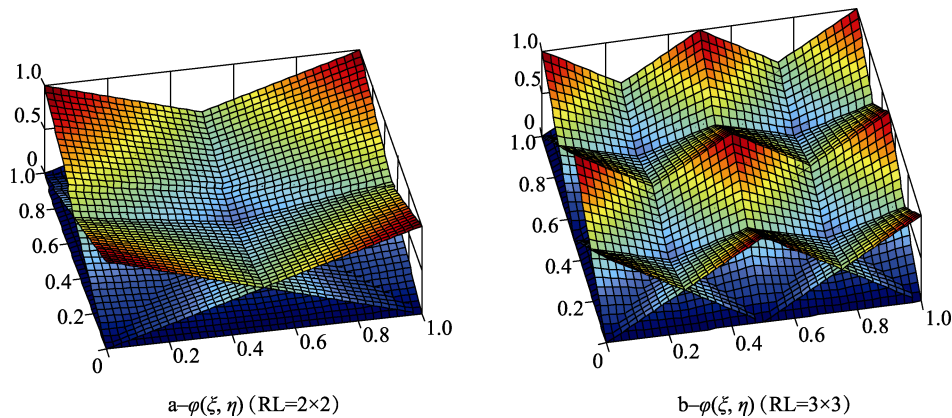


图 5 单元区域 $[0, 1]^2$ 上经收缩和平移后的节点形函数

Fig. 5 Scaled and shifted version of basic node shape function on element domain of $[0, 1]^2$

可以看出, 由于基函数向量中的元素为 $\varphi_{mn,rs}$, 其不同的分辨率和节点平移参数形成的不同函数组是线性无关的, 所以其构成的位移空间序列是一个由相互嵌套、包含的诸多子空间所组成, 即 $[V_{00}, \dots, V_{ij}, \dots, V_{mn}]$, 此位移子空间序列构成一个 MRA, 即

$$\begin{aligned} V_{ij} &:= \text{span} \{ \Psi_{ij}^e : i, j \in \mathbb{Z} \}, \\ V_{ij} &\subset V_{i(j+1)}, V_{ij} \subset V_{(i+1)j}, V_{ij} \subset V_{(i+1)(j+1)}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中, V_{ij} 为 $RL=(i+1) \times (j+1)$ 的位移子空间。

因此, 在 $RL=(m+1) \times (n+1)$ 的位移子空间中, 平面单元内任意一点的位移可写为

$$\begin{Bmatrix} u_{mn}^e \\ v_{mn}^e \end{Bmatrix} = \Psi_{mn}^e \mathbf{a}_{mn}^e, \quad (7)$$

其中, $\mathbf{a}_{mn}^e = [u_{00}, v_{00}], \dots, [u_{rs}, v_{rs}], \dots, [u_{mn}, v_{mn}]^T$; u_{rs}, v_{rs} 分别为单元节点 $(\frac{r}{m}, \frac{s}{n})$ 处沿 x, y 方向的位移。

显然, 此单元为无网格单元, 其单元内节点数量和位置可由分辨率自由调节; 一旦确定了单元分辨率也就确定了节点总数量及其具体位置。当式 (7) 中的 $RL=2 \times 2$ 时, 该式就退化为传统平面单元的位移场, 因此, 传统平面单元, 也就是单分辨率单元, 为本文多分辨率平面单元的一个特例。

3 多分辨率平面单元

在 $RL=(m+1) \times (n+1)$ 的位移子空间中, 平面单元的总势能可写为

$$\Pi(V_{mn}) = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [\varepsilon]_{mn}^T [D_m] [\varepsilon]_{mn} dx dy - \int_0^a \int_0^b (p_x u^{mn} + p_y v^{mn}) dx dy + \sum_i (P_{xi} u^{mn} + P_{yi} v^{mn}), \quad (8)$$

其中, $[\varepsilon]_{mn} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_{mn}^e}{\partial x} \\ \frac{\partial v_{mn}^e}{\partial y} \\ \frac{\partial u_{mn}^e}{\partial y} + \frac{\partial v_{mn}^e}{\partial x} \end{bmatrix}$; $[D_m] = C_m \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}$, $C_m = \frac{Eh}{1-\mu^2}$, E 为单元材料的弹性模量, h 为单元板厚, μ 为泊松比; p_x, p_y 分别为沿 x, y 方向的平面内分布力; P_x, P_y 分别为沿 x, y 方向的平面内集中力。

由式 (7) 可得到

$$[\varepsilon]_{mn} = [B_{00}, \dots, B_{rs}, \dots, B_{mn}] a_{mn}^e, \quad (9)$$

其中, $B_{rs} = \left[\frac{\partial \varphi_{rs,mn}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{rs,mn}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_{rs,mn}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{rs,mn}}{\partial x} \right]^T$.

将式 (7) 代入式 (8), 经整理简化后可得

$$\Pi_p(V_{mn}) = \frac{1}{2} a_{mn}^{eT} K_{mn}^e a_{mn}^e - a_{mn}^{eT} f_{mn}^e - a_{mn}^{eT} F_{mn}^e, \quad (10)$$

其中, K_{mn}^e 为单元刚度矩阵; f_{mn}^e 为单元节点分布等效荷载向量; F_{mn}^e 为单元节点集中等效荷载向量。

根据最小势能原理, 即 $\delta \Pi_p(V_{mn}) = 0$, 可得平面应力单元的平衡方程:

$$K_{mn}^e a_{mn}^e = f_{mn}^e + F_{mn}^e, \quad (11)$$

其中,

$$K_{mn}^e = \begin{bmatrix} k_{00}^{00} & \dots & k_{rs}^{00} & \dots & k_{mn}^{00} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{00}^{rs} & \dots & k_{rs}^{rs} & \dots & k_{mn}^{rs} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{00}^{mn} & \dots & k_{rs}^{mn} & \dots & k_{mn}^{mn} \end{bmatrix},$$

其中,

$$\begin{cases} k_{rs}^{rs} = \sum_{\substack{|c-r| \leq 1 \\ |d-s| \leq 1}} k_{cd,rs}, \\ k_{rs}^{rs} = k_{cd,rs} = 0, |c-r| > 1, |d-s| > 1, \end{cases}$$

其中, $k_{cd,rs}$ 为节点 (c, d) 与节点 (r, s) 的相关刚度矩阵, 可写为

$$k_{cd,rs} = ab \int_0^1 \int_0^1 B_{cd}^T [D_m] B_{rs} d\xi d\eta, \quad (12)$$

$$\begin{cases} f_{mn,rs}^e = ab \int_0^1 \int_0^1 [\varphi_{mn,rs} p_x, \varphi_{mn,rs} p_y]^T d\xi d\eta, \\ F_{mn,rs}^e = \sum_i [\varphi(m\xi_i - r, n\eta_i - s) P_{xi}, \varphi(m\xi_i - r, n\eta_i - s) P_{yi}]^T. \end{cases} \quad (13)$$

4 转换矩阵

通过上述步骤,可以得到多分辨率平面单元的刚度与等效节点力。为进行结构计算,需要将单元刚度与等效节点力转换到整体坐标系下,此转换可以通过转换矩阵 T_{mn}^e 实现,即

$$K_{mnl}^i = T_{mn}^{eT} K_{mn}^e T_{mn}^e, \quad (14)$$

$$f_{mn}^i = T_{mn}^{eT} f_{mn}^e, \quad (15)$$

$$F_{mn}^i = T_{mn}^{eT} F_{mn}^e, \quad (16)$$

其中, $T_{mn}^e = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_{ij} & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & \lambda_{mn} \end{bmatrix}, \lambda_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{xX} & \cos \theta_{xY} \\ \cos \theta_{yX} & \cos \theta_{yY} \end{bmatrix}.$

5 结构总刚和节点力

得到整体坐标系下的单元刚度与等效节点力后,很容易得到结构的总刚和节点力:

$$K_{mn} = \sum_i K_{mn}^i, \quad (17)$$

$$F_{mn} = \sum_i F_{mn}^i, \quad (18)$$

$$f_{mn} = \sum_i f_{mn}^i. \quad (19)$$

6 算例与讨论

6.1 算例

如图 6 所示的悬臂梁^[1],受均布荷载 $q=1 \text{ N/mm}^2$ 作用, $E=2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\mu=0.3$, 厚度 $d=10 \text{ mm}$, 长 $l=400 \text{ mm}$, 高 $h=80 \text{ mm}$, 求其梁轴中线上的位移。

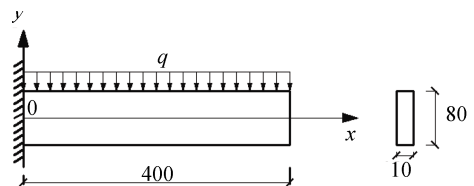


图 6 悬臂梁 (mm)

Fig. 6 A cantilever beam (mm)

如图 7 所示,分别采用单个多分辨率平面单元模型和传统的单分辨率平面单元模型进行分析计算。多分辨率平面单元模型的分辨率分别取为 3×6 和 5×11 , 传统单分辨率平面单元模型的网格对应地取为 2×5 和 4×10 , 其结果如图 8 所示。可以看出,多分辨率平面单元是个无网格单元,它可以通过调节其分辨率的大小来调整单元节点的数量,从而调节单元的计算精度,此单元相当于一张图片,单元节点与图片中的像素相当,其计算分析的精度等同于图片的清晰度。因此,高精度单元的节点数量肯定要多于低精度单元。虽然多分辨率平面单元模型与传统的单分辨率平面单元

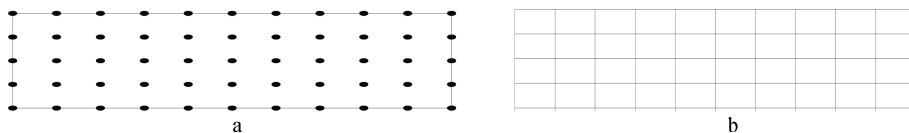


图 7 悬臂梁平面单元模型

Fig. 7 Plane element model of cantilever beam

a—多分辨率单元模型 (分辨率); b—单分辨率单元模型 (网格)

a-A multiresolution element model (RL); b-A mono-resolution element model (mesh)

模型比较,其计算精度相当,但多分辨率模型较传统的单分辨率模型具有以下优势:1)多分辨率模型中的分辨率具有明确的数学意义,其取值具有坚实的数学基础,而传统模型的网格划分主要依靠经验,其无数学基础,无任何数学意义,另外,图片中并无网格;2)多分辨率单元模型中节点刚度与等效力可以直接自动生成而传统单元模型的节点刚度与等效力需进行人工叠加组合;3)与传统单元模型相比较,多分辨率单元模型中单元数量少,因此矢量转换次数少,计算效率高。

6.2 讨论

MRA 可以看为一种曝光的单元细节数量可随意调节的技术。在数值分析领域,大尺寸单元的节点(细节)数量可采用不同的方法和方式,比如传统有限元法、小波有限元法、无网格法、自然单元法和多分辨率有限元法等来进行调整。传统有限元法采用经验性的网格划分方式来调节大单元内节点数量,而网格划分基本上没有数学基提供支撑;小波有限元法采用依靠所建立的相互包含、嵌套的多尺度空间序列这样的数学基的方式,但是该数学基是个弱基且因其构建过程复杂而效率较低(二、三维);无网格法、自然单元法应用经验性的拓扑排布的节点布置方式,而节点拓扑排布也没有数学基提供支撑。总之,上述各种方法或其他方法都缺乏 RL 这种很容易调节节点数量的常数,就是因为它们都没有一个简洁而坚实的数学基础,而本文提出的多分辨率有限元方法具有此简洁而坚实的数学基础,因此,它拥有一个分辨率常数 RL ,可以方便地调节大单元的节点数量同时确定每个节点在单元中的位置。因此,可以说,小波有限元法、无网格法、自然单元法等都属于非理性多辨分析方法,可被视为传统单分辨率有限元法向多分辨率有限元法转化过程中所产生的过渡性的方法,即多分辨率有限元法完全统一了这些方法。

7 结论

构造了多分辨率平面单元有限元方法,与传统平面单元有限元法相比,本文单元和有限元方法有如下特点。

1) 基于平面应力单元的节点形函数,提出一种新颖的函数延拓方法,构建了基本节点形函数。该函数具有 Kronecker delta 特性,其便于边界条件的处理,同时基本节点形函数的连续性为传统有限元法中节点刚度可由该节点共同单元的刚度叠加得到的处理方法提供了坚实的理论基础。

2) 采用基本节点函数的收缩和平移,构造了多分辨率分析的基函数,从而建立了多分辨率单元相互嵌套、包含的位移子空间序列这个简洁而坚实的数学基础。因此,在数值分析中引入了分辨率常数 RL ,从而建立了理性的 MRA 概念,实现了结构理性的多分辨数值分析。

3) 传统平面单元有限元法是单分辨率单元有限元法,是本文多分辨率平面单元有限元方法的一个特例。

4) 结构数值分析清晰度的高低是由分辨率大小决定的而非网格的疏密;高清晰度单元的节点数多于低清晰度单元。

5) 理性多辨分析的多分辨率平面单元有限元法可以完全统一那些相应的非理性多辨分析的有网格或无网格法;多分辨率平面单元有限元方法计算效率高于相应的其他有网格或无网格平面单元有限元法;多分辨率有限元法以清晰度取代了其他方法的精度,以分辨率代替了网格或条带,以理性多分辨分析替

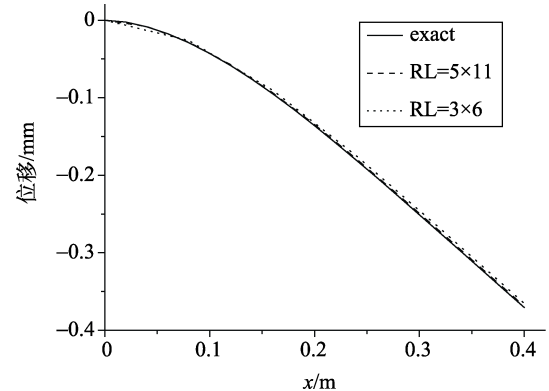


图 8 悬臂梁中轴线的挠曲曲线
Fig. 8 Flexure curve for central axis of cantilever beam

换了非理性多分辨分析, 由此, 结构数值分析实现了从碎片化(离散化)模型到完整化模型转变。

6) 随着多分辨率有限元法^[13-18]的提出, 理性多分辨分析将会在工程实际中得到广泛的应用。

最后, 针对连接不同分辨率单元的过渡单元的构造问题, 同样可以采用将基本节点形函数伸缩平移, 并结合虚实节点的方法加以解决。

[参考文献] (References)

- [1] 何正嘉, 陈雪峰, 李兵, 等. 小波有限元理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
HE Z J, CHEN X F, LI B, et al. Wavelet finite element theory and its application[M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese)
- [2] XU J. An introduction to multigrid convergence theory[M]//CHAN R H, CHAN T F, GOLUB G H. Iterative Methods in Scientific Computing. Singapore: Springer, 1997: 169-241.
- [3] XU J, ZIKATANOV L T. On multigrid methods for generalized finite element methods[M]//GRIEBEL M, SCHWEITZER M A. Meshfree Methods for Partial Differential Equations. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003: 401-418.
- [4] KRAUSE R, RANK E. Multiscale computations with a combination of the h - and p - versions finite element method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192(35-36): 3959-3983.
- [5] ZIENKIEWICZ O C. The background error estimation and adaptivity in finite element computation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(4-6): 207-213.
- [6] JENNY P, LEE S H, TCHELEPI H A. Multiscale finite volume method for elliptic problem subsurface flow simulation[J]. Journal of Computational Physics, 2003, 187(1): 47-67.
- [7] JENNY P, LEE S H, TCHELEPI H A. Adaptive multiscale finite-volume method for multiphase flow and transport in porous media[J]. Multiscale Model & Simulation, 2004, 3(1): 50-64.
- [8] HOU T Y, WU X H, ZHANG Y. Removing cell resonance error in the multiscale finite element method via a Petrove-Galerkin formulation[J]. Communications in Mathematical Sciences, 2004, 2(2): 185-205
- [9] HE X G, REN L. A modified multiscale finite element method for well-driven flow problems in heterogeneous porous media[J]. Journal of Hydrology, 2006, 329(3-4): 674-684.
- [10] XIANG J W, CHEN X F, HE Z J, et al. The construction of 1D wavelet finite element for structural analysis[J]. Computational Mechanics, 2007, 40(2): 325-339.
- [11] 陈文. 奇异边界法: 一个新的、简单、无网格、边界配点数值方法[J]. 固体力学学报, 2009, 30(6): 592-599.
CHEN W. Singular boundary method: a novel, simple, meshfree, boundary collocation numerical method[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2009, 30(6): 592-599. (in Chinese)
- [12] 赵敏, 陈文. 基于径向基函数的加权最小二乘无网格法[J]. 计算力学学报, 2011, 28(1): 66-71.
ZHAO M, CHEN W. A meshless weighted least square method based on radial basic functions[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(1): 66-71. (in Chinese)
- [13] XIA Y M, LIU Y X, CHEN S L, et al. A rectangular shell element formulation with a new multi-resolution analysis[J]. Acta Mechanica Sinica, 2014, 27(6): 612-625.
- [14] XIA Y M. A multiresolution finite element method based on a new quadrilateral plate element[J]. Journal of Coupled System and Multiscale Dynamics, 2014, 2(2): 52-61.
- [15] XIA Y M, CHEN S L. A hexahedron element formulation with a new multiresolution analysis[J]. Science China Physics, Mechanics, Astronomy, 2015, 58(1): 014601-014610.
- [16] 夏逸鸣, 唐敢, 江世永. 多分辨率 Timoshenko 梁单元[J]. 固体力学学报, 2014, 35(1): 57-62.
XIA Y M, TANG G, JIANG S Y. A multiresolution Timoshenko beam element formulation[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2014, 35(1): 57-62. (in Chinese)
- [17] XIA Y M. A multiresolution finite element method based on a new locking-free Mindlin plate element[J/OL]. [2015-05-26]. <http://arXiv.org/abs/1505.06822>.
- [18] 夏逸鸣. 多分辨率有限元方法[D]. 重庆: 后勤工程学院, 2012.
XIA Y M. A multiresolution finite element method[D]. Chongqing: Logistics Engineering University, 2012. (in Chinese)