

# 一种北斗伪距单点定位的整体最小二乘算法

马天明<sup>1</sup>, 曾繁慧<sup>2</sup>

(1. 辽宁工程技术大学测绘与地理科学学院, 辽宁阜新 123000;

2. 辽宁工程技术大学理学院, 辽宁阜新 123000)

**摘要:** 针对目前北斗伪距单点定位普遍采用普通最小二乘算法, 只考虑观测方程的常数项误差而忽略了观测方程系数矩阵误差的缺点, 提出采用整体最小二乘算法进行伪距单点定位。采用 C++ 语言编写北斗伪距单点定位程序, 通过北斗实测数据对所提整体最小二乘算法进行验证, 并与普通最小二乘算法定位结果进行比较。结果表明, 整体最小二乘算法定位精度更高, 应用范围更广。

**关键词:** 应用数学; 北斗; 伪距单点定位; 整体最小二乘

**中图分类号:** P228.1      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1674-2850(2016)01-0088-05

## A pseudo-range single point positioning algorithm for the Beidou navigation system based on total least squares

MA Tianming<sup>1</sup>, ZENG Fanhui<sup>2</sup>

(1. School of Mapping and Geographical Science, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning 123000, China;

2. School of Science, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning 123000, China)

**Abstract:** Ordinary least squares is adopted commonly in Beidou pseudo-range single point positioning at present, however, the deviation of constant term is considered and the deviation of coefficient matrix is not considered in ordinary least squares algorithm, total least squares in pseudo-range single point positioning is presented. Single point positioning program of Beidou by using C++ is presented, which is proved by the measured Beidou data. Comparing with that, total least squares algorithm is more accurate in positioning and has wider application.

**Key words:** applied mathematics; Beidou; pseudo-range single point positioning; total least squares

## 0 引言

2012年10月25日,我国北斗卫星系统发射了第十六颗导航卫星,这极大地促进了我国及周边国家导航事业的发展。北斗伪距单点定位因其速度快、灵活方便、只需要一台接收机就能满足实时测量的要求,而广泛应用于车辆、船舶、飞机导航,地质勘测以及海洋捕鱼等领域<sup>[1]</sup>。提高北斗伪距单点定位的精度对加快我国北斗产业化步伐起到重要的推动作用。

北斗伪距单点定位以北斗卫星和用户接收机天线间的距离观测量为基础,并根据卫星坐标来确定接收机天线所对应的观测点的坐标<sup>[2]</sup>。这里运用整体最小二乘算法和普通最小二乘算法,在 VS2010 软件平台上,通过编写 C++ 程序语言实现北斗卫星系统的伪距单点定位。由于北斗伪距单点定位忽略电离层、对流层、测量噪声等对定位精度的影响<sup>[3]</sup>,其定位精度相较于精密单点定位略差,运用普通最小二乘算法的定位精度在 10 m 左右,而运用整体最小二乘算法进行定位计算,相较于普通最小二乘算法,定

**作者简介:** 马天明 (1990—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向: 卫星定位

**通信联系人:** 曾繁慧, 教授, 主要研究方向: 信息科学与应用. E-mail: 597873883@qq.com

位精度在平面位置可以提高 4 m 左右，在垂直方向可以提高 2 m 左右，而且运用整体最小二乘算法可以加快坐标收敛速度，进而加快用户的定位速度。

## 1 整体最小二乘的基本思想

对于线性方程组  $AX=L$ ，普通最小二乘的基本思想是在残差平方和极小的准则约束下求解最佳参数。这里有一个前提，系数矩阵  $A$  是没有误差的精确值，但多数情况下系数阵  $A$  和观测向量  $L$  同时存在误差，若同时考虑二者的误差，此时，线性方程组可表示为<sup>[4]</sup>

$$(A + E_A)X = L + E_L, \quad (1)$$

其中， $E_A$  为系数阵的噪声； $E_L$  为观测噪声；误差矩阵  $[E_A, E_L]$  属于相互独立的自噪声误差。这一模型称为 EIV (errors-in-variables) 模型，解决这类问题的适宜方法是整体最小二乘法，对于线性方程组  $AX=L$ ，整体最小二乘问题就是在以下准则约束下寻求  $\bar{A}$  和  $\bar{L}$ ：

$$\min \|[A, L] - [\bar{A}, \bar{L}]\|_F, \quad (2)$$

其中， $\|M\|_F$  为 Frobenius 范数，简称为 F 范数。任何满足  $\bar{A}X = \bar{L}$  的  $X$  均称为线性方程  $AX=L$  的整体最小二乘解。

## 2 整体最小二乘应用于北斗伪距单点定位

北斗伪距单点定位的原理就是通过接收机接收 4 颗及以上的导航电文和卫星星历数据，利用卫星导航电文和卫星星历数据解算出卫星的位置，再利用卫星与用户间的空间几何关系构造方程求解<sup>[5]</sup>。

若  $\rho_i$  为伪距观测值， $V_R$  为接收机钟差， $V_S$  为卫星钟差， $V_{ion}$  为电离层延迟， $V_{trop}$  为对流层延迟，北斗伪距单点定位的观测方程为

$$\rho_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} - cV_R + cV_S - (V_{ion})_i - (V_{trop})_i. \quad (3)$$

若测站的近似坐标为  $(x^0, y^0, z^0)$ ，将式 (3) 在  $(x^0, y^0, z^0)$  处用泰勒级数展开后可得线性化的观测方程<sup>[6]</sup>：

$$\rho_i = \rho_i^0 - \frac{(x^i - x^0)}{\rho_i^0} V_x - \frac{(y^i - y^0)}{\rho_i^0} V_y - \frac{(z^i - z^0)}{\rho_i^0} V_z - cV_R + cV_S - (V_{ion})_i - (V_{trop})_i, \quad (4)$$

其中， $\rho_i^0$  为测站近似位置至第  $i$  颗卫星的距离； $\frac{x^i - x^0}{\rho_i^0} = l_i$ ， $\frac{y^i - y^0}{\rho_i^0} = m_i$ ， $\frac{z^i - z^0}{\rho_i^0} = n_i$ ，为从测站的近似位置至卫星  $i$  方向上的方向余弦。于是误差方程可以写为

$$V_i = -l_i V_x - m_i V_y - n_i V_z - cV_R + L_i, \quad (5)$$

其中的常数项为

$$L_i = \rho_i^0 - \rho_i + cV_S - (V_{ion})_i - (V_{trop})_i. \quad (6)$$

误差方程的矩阵形式为

$$V_i = [-l_i, -m_i, -n_i, -c] \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ V_R \end{bmatrix} + L_i. \quad (7)$$

这里根据整体最小二乘的思想，把系数矩阵和常数项矩阵组成一个增广矩阵  $C$ ，则矩阵  $C$  可以表示为

$$C = [-l_i, -m_i, -n_i, l_i], \quad (8)$$

对增广矩阵  $C$  进行奇异值分解  $C = U\Sigma V^T$ ，其中，

$$\Sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1}), \quad (9)$$

则整体最小二乘解可由增广矩阵右奇异向量的最后一列得到  $V_{n+1}$ ，即整体最小二乘的解为

$$x = -\frac{(V_{1,n+1}, \dots, V_{n,n+1})}{V_{n+1,n+1}}. \quad (10)$$

### 3 实例分析

#### 3.1 数据采集

实验数据采用的是阜新 CORS 站的实测数据，采用北斗和 GPS 双系统双频接收机，观测时段为 2013 年 2 月 26 日 2 时至 24 时，采样间隔为 5 s，卫星截止高度角设置为  $15^\circ$ ，最后获取了 RINEX 格式的观测值文件和导航电文文件。

#### 3.2 实验结果与精度分析

根据实验观测的数据，应用整体最小二乘算法和普通最小二乘算法，依据伪距单点定位的步骤编写程序，计算接收机的绝对坐标，将最终得到的定位结果减去测站的高精度值可得  $x, y, z$  3 个方向的坐标差值。图 1~图 3 分别表示北斗卫星系统基于普通最小二乘算法的定位结果  $x, y, z$  3 个方向的坐标偏差。

同样地，应用整体最小二乘算法可以得到北斗卫星系统的单点定位结果，将最终的定位结果减去测站高精度值可得  $x, y, z$  3 个方向的坐标差值。图 4~图 6 分别表示北斗卫星系统基于整体最小二乘算法的  $x, y, z$  3 个方向的坐标偏差。

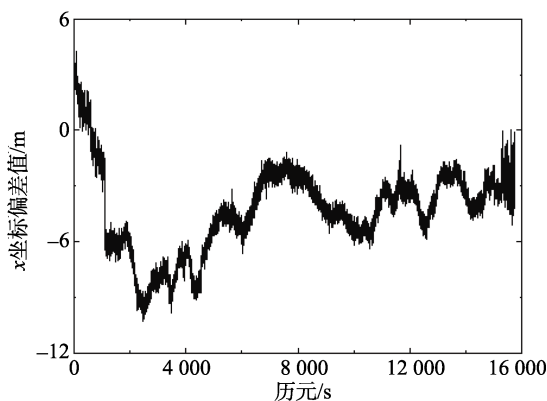


图 1 基于普通最小二乘法的  $x$  坐标偏差  
Fig. 1 Coordinate deviation based on ordinary least squares in  $x$

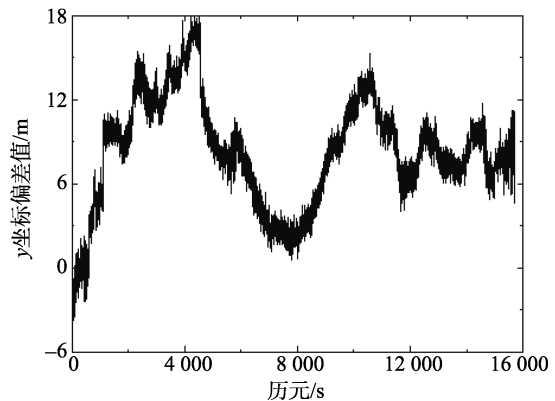


图 2 基于普通最小二乘法的  $y$  坐标偏差  
Fig. 2 Coordinate deviation based on ordinary least squares in  $y$

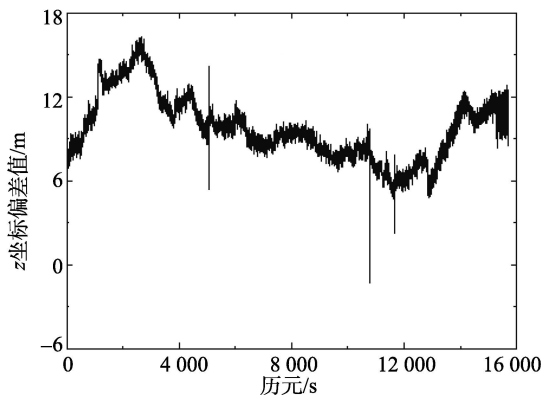


图3 基于普通最小二乘法的 z 坐标偏差  
Fig. 3 Coordinate deviation based on ordinary least squares in z

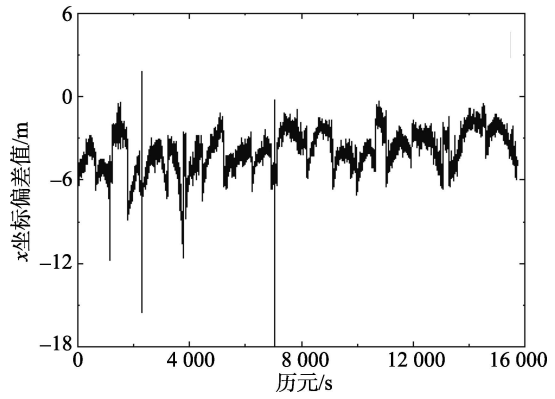


图4 基于整体最小二乘法的 x 坐标偏差  
Fig. 4 Coordinate deviation based on total least squares in x

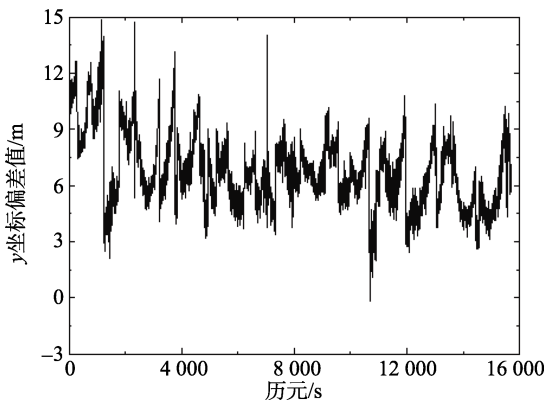


图5 基于整体最小二乘法的 y 坐标偏差  
Fig. 5 Coordinate deviation based on total least squares in y

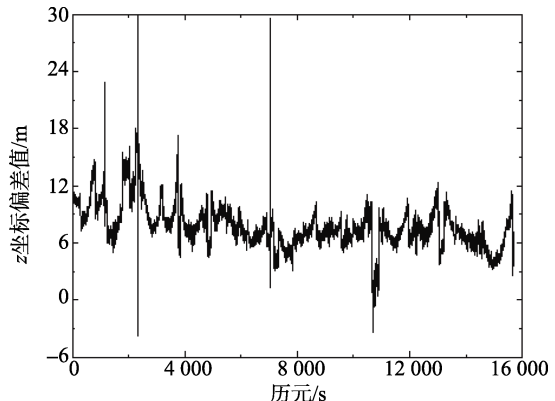


图6 基于整体最小二乘法的 z 坐标偏差  
Fig. 6 Coordinate deviation based on total least squares in z

由图1~图6可以看出,基于普通最小二乘算法的北斗伪距单点定位结果的  $x$ ,  $y$ ,  $z$  3 个方向的坐标偏差均在 10 m 左右,而且定位结果不稳定,而应用整体最小二乘算法的北斗伪距单点定位结果的坐标偏差在 5 m 左右,即整体最小二乘算法较普通最小二乘算法的定位精度高 5 m 左右,而且整体最小二乘算法的定位结果更稳定、更可靠。

## 4 结论

将整体最小二乘法应用于北斗伪距单点定位的计算中,弥补了普通最小二乘算法只考虑观测方程常数项误差而忽略系数矩阵也存在误差的缺点,用 C++语言在 VS2010 的平台上实现了北斗卫星定位系统的伪距单点定位程序。通过与普通最小二乘法的定位结果对比可以看出,整体最小二乘算法较普通最小二乘算法的定位精度高 5 m 左右。因此,基于整体最小二乘算法的北斗伪距单点定位可以为用户提供更高精度的定位结果,对今后研究北斗伪距单点定位的算法具有重要的参考价值。

### [参考文献] (References)

- [1] 裴霄,王解先. GPS 伪距单点定位的精度分析及改进[J]. 海洋测绘, 2012, 32 (1): 5-7.  
PEI X, WANG J X. Analysis and improvement of accuracy in GPS single point pseudo-range[J]. Hydrographic Surveying and Charting, 2012, 32(1): 5-7. (in Chinese)

- [2] 李征航, 黄劲松. GPS 测量与数据处理[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2005.  
LI Z H, HUANG J S. GPS surveying and data processing[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2005. (in Chinese)
- [3] 张月超, 陈义, 胡川. Kalman 滤波在 GNSS 伪距单点定位中的应用[J]. 全球定位系统, 2013, 38 (6): 31-35, 57.  
ZHANG Y C, CHEN Y, HU C. The application of Kalman filter in single point position using GPS C/A code[J]. GNSS World of China, 2013, 38(6): 31-35, 57. (in Chinese)
- [4] 丁克良, 欧吉坤, 陈义. 整体最小二乘法及其在测量数据处理中的应用[C]//中国测绘学会第九次全国会员代表大会论文集. 北京: 中国测绘学会, 2009: 399-405.  
DING K L, OU J K, CHEN Y. Integral least square method and its application in measurement data processing[C]// Proceedings of the 9th National Congress of the China Society Surveying and Mapping. Beijing: China Society Surveying and Mapping, 2009: 399-405. (in Chinese)
- [5] 安向东. GPS 与北斗伪距单点定位性能对比分析[J]. 全球定位系统, 2014, 39 (3): 8-14.  
AN X D. Comparison and analysis of the performance of the single point positioning of the compass and GPS[J]. GNSS World of China, 2014, 39(3): 8-14. (in Chinese)
- [6] 陈希孺. 最小二乘法的历史回顾与现状[J]. 中国科学院研究生院学报, 1998, 15 (1): 4-11.  
CHEN X R. Historical review and present situation of the least square method[J]. Journal of Graduate School, Academia Sinica, 1998, 15(1): 4-11. (in Chinese)