二元函数求极限的若干方法研究

张付臣

（重庆工商大学数学与统计学院，重庆 400067）

摘要：求二元函数的极限是微积分课程中的重要内容，对于判断二元函数的连续性起着非常重要的作用。研究主要针对求解二元函数的极限计算问题，总结了几种常用的求解方法与技巧——定义法、换元法、等价无穷小量替换法、两边夹准则法、放缩法、有界量与无穷小量的乘积是无穷小量法、利用极坐标代换法等，并给出求解实例。上述解题方法在实际运用中需要相互结合、灵活运用，这有助于满足学生的好奇心和求知欲，使之在生动形象、风趣幽默的课堂情境中，增长见识，提高创新能力，并可大大地激发学生的参与热情和学习兴趣。

关键词：数学分析；二元函数；极限；求解方法

中图分类号：O172 **文献标识码**：A **文章编号**：1674-2850(2016)01-0071-04

Study on calculation methods of the limit of function of two variables

ZHANG Fuchen

(*College of Mathematics and Statistics*, *Chongqing Technology and Business University*, *Chongqing* 400067, *China*)

Abstract: The limit of the function of two variables is an important content in the course of calculus calculation. Also, the limit of the function of two variables plays a very important role in the continuity of functions. For beginners, it is difficult to obtain the limit of function of two variables. This paper mainly aims at calculation problem of the limit of the function of two variables, summarizes several commonly used methods and techniques. For example, definition method, substitution method, equivalent infinitesimal replacement method, on both sides of the clip criterion method, scaling, circles and infinitely small quantity of the product is infinitesimal method, using polar coordinate transformation method, etc. These methods are not alone in the practical use, sometimes several methods need to be combined with each other. This is helpful for satisfying students' curiosity and desire for knowledge, making the students study in a vivid and humorous classroom context, enriching their knowledge, improving their innovation ability, and stimulating students' enthusiasm and interest greatly in learning.

Key words: mathematical analysis; function of two variables; limits; calculation method

0 引言

对于初学者来说，一元函数极限的计算比较简单[1~2]。虽然大多数教材中指出二元函数的极限与一元函数的极限具有相同的性质和运算法则[3~4]，但是二元函数极限的存在性判别和计算则是相对困难的（在函数极限存在的前提下），而且大多数微积分教材中没有直接给出二元函数极限的求解方法[5~6]。由于数轴上的点和平面上的点邻域（或者开集）不一样，从而导致一元函数和二元函数的极限判别存在较大的差异。二元函数极限的求解，从理论上来讲可以按照定义来求，但是用二元函数极限的数学定义来写出

基金项目：国家自然科学基金（11426047，11501064）；重庆市科委基金（cstc2014jcyjA00040）；重庆工商大学博士科研启动基金（2014-56-11）

作者简介：张付臣（1983—），男，讲师，主要研究方向：常微分方程解的稳定性与分岔. E-mail: zhangfuchen1983@163.com

证明过程相当复杂，因此还需要其他相关的数学技巧和方法[7]。对于二元函数极限，若通过换元，把求二元函数的极限变成一元函数极限的求解问题，则所有一元函数求极限的方法均可用，如洛必达法则、重要极限等。本文主要通过举例探讨和总结二元函数极限计算的几种计算技巧和方法——定义法、换元法、等价无穷小量替换法、两边夹准则法、放缩法、有界量与无穷小量的乘积是无穷小量法、利用极坐标代换法等（上述解题方法在实际运用中并不是孤立的，有时几种方法需要相互结合运用）。这对于激发初学者的学习热情，促进学生的数学思维发展，培养学生的创新能力，有很大帮助。

1 极限求解方法例析

1.1 定义法

例 1 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{2}{x^2+y^2}$.

解：$|(x^2+y^2)\sin\dfrac{2}{x^2+y^2}-0|\leqslant x^2+y^2$，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$，当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时，有 $|(x^2+y^2)\sin\dfrac{2}{x^2+y^2}-0|<\varepsilon$. 按照定义，有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{2}{x^2+y^2}=0$.

1.2 两边夹准则法

例 2 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$.

解：由不等式 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$，$0\leqslant\left|\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^2y}{xy}\right|=|x|\to 0$，当 $(x,y)\to(0,0)$，由夹逼定理知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}=0$.

注释 1：例 1 也可以根据有界量与无穷小量的乘积是无穷小量法直接得到答案。

上述解题方法在实际运用中并不是孤立的，有时几种方法需要相互结合运用，如例 2 同时用到了放缩法和夹逼定理法。这里只是举例说明，其他方法不再一一列举。

1.3 等价无穷小量替换法

例 3 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2\sin xy}{xy}$.

解：因为二元函数的极限没有洛必达法则，故令 $xy=t,(x,y)\to(0,0)\Rightarrow t\to 0$，从而把计算二元函数的极限转化为求解一元函数的极限，并且有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2\sin xy}{xy}=2\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=2 \text{（因为 } t\to 0,\ \sin t \text{ 与 } t \text{ 是等价无穷小量）}.$$

1.4 换元法

例 4 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}2(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)$.

解：令

$$x^2+y^2=t,\ (x,y)\to(0,0)\Rightarrow t\to 0,\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)=\lim_{t\to 0}2t\sin t=0.$$

注释 2：若通过换元，将求二元函数的极限变成一元函数极限的求解问题，则所有一元函数求极限的方法均可用，如洛必达法则、重要极限等。此题的二元函数极限也可以通过放缩法，利用两边夹准则求极限。

2 极限存在性判断方法解析

直接运用定义判断二元函数极限的存在与否非常困难。因为不能事先预定函数极限的存在与否，即使函数的极限存在，有时也很难直接看出函数的极限值。因此，下面给出二元函数极限存在的充要条件。

定理 1[3] $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)=A$ 的充要条件是：对于 D 的任意子集 E，只要 P_0 是 E 的聚点，就有 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in E}} f(P)=A.$

由于一个命题和它的逆否命题是等价的，于是从定理 1 的逆否命题又可以得到如下推论。

推论 1[3] 设 $E_1\subset D$, P_0 是 E_1 的聚点，若 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in E_1}} f(P)$ 不存在，则 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)$ 也不存在。

推论 2[3] 设 $E_1,E_2\subset D$, P_0 是它们的聚点，若存在极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in E_1}} f(P)=A_1$, $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in E_2}} f(P)=A_2$，但 $A_1\neq A_2$，则 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)=A$ 不存在。

推论 3[3] 极限 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)=A$ 的充要条件是：对于 D 中任一满足条件 $P_n\neq P_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=P_0$ 的点列 $\{P_n\}$，它所对应的函数列 $\{f(P_n)\}$ 都收敛且极限都等于 A.

注释 3：定理 1 给出了函数极限存在的充要条件，即要求函数 $f(P)$ 在函数的定义域 D 内以任意方式趋于点 P_0 时，函数 $f(P)$ 的极限都存在且相等。推论 3 给出了二元函数的极限与二元函数列极限的关系，类似于一元函数极限的归结原则（又称海涅定理）。下面用函数极限存在的充要条件来判断给定函数极限的存在与否。

例 5 讨论 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时是否存在极限。

解：1）当 (x,y) 沿 x 轴趋于 $(0,0)$ 时，有 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=0$.

2）当 (x,y) 沿 y 轴趋于 $(0,0)$ 时，有 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=0$.

3）当 (x,y) 沿射线 $y=kx\ \ (k\neq 0)$ 趋于 $(0,0)$ 时，有 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}.$

这说明当动点沿不同的方式趋于原点 $(0,0)$ 时，对应的极限值也不同，因此所讨论的极限不存在。（实际上只根据 3）也可以断定：当动点沿不同斜率 k 的直线趋于原点 $(0,0)$ 时，对应的极限值也不同，因此所讨论的极限不存在。）

注释 4：其实，例 5 也可以利用极坐标代换法 $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$ 来判断，有兴趣的读者可以自己

写出解题过程。

注释5：上述二元函数求极限的方法（包括定义法、换元法、等价无穷小量替换法、两边夹准则法、放缩法、有界量与无穷小量的乘积是无穷小量法、利用极坐标代换法等），可以推广至 n 元函数求极限，这里不再一一列举。

3 结论

给出了二元函数极限的几种计算方法，只要在二元函数极限的计算中，按照极限计算的法则和步骤进行计算，并且灵活地运用这些技巧和方法，那么既可以保证快速解题，又能保证计算结果的正确性，而且还可以将二元函数极限计算变得简单易学。上述解题方法在实际中并不是孤立的，有时几种方法需要相互结合运用。上述二元函数求极限的方法，包括定义法、换元法、等价无穷小量替换法、两边夹准则法、放缩法、有界量与无穷小量的乘积是无穷小量法、利用极坐标代换法等，也可以推广至 n 元函数求极限中。

[参考文献] (References)

[1] 袁红，张付臣，李小武. 关于Hopf分岔中向量函数泰勒公式中算子系数表示的评注[J]. 重庆工商大学学报（自然科学版），2012，29（10）：6-10.
YUAN H, ZHANG F C, LI X W. Remarks on operator coefficient in Talor formula for vector function of Hopf bifurcation[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2012, 29(10): 6-10. (in Chinese)

[2] 丁宣浩，杨宜平. 区间上连续函数的性质与构造证明法[J]. 重庆工商大学学报（自然科学版），2011，28（4）：410-416.
DING X H, YANG Y P. Properties of continuous functions on the interval and their proofs with construction method[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2011, 28(4): 410-416. (in Chinese)

[3] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京：高等教育出版社，2001.
Department of Mathematics, East China Normal University. Mathematical analysis[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001. (in Chinese)

[4] 同济大学应用数学系. 高等数学[M]. 5版. 北京：高等教育出版社，2002.
Department of Applied Mathematics, Tongji University. Advanced mathematics[M]. 5th ed. Beijing: Higher Education Press, 2002. (in Chinese)

[5] 侯风波. 高等数学[M]. 北京：高等教育出版社，2003.
HOU F B. Advanced mathematics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003. (in Chinese)

[6] 卢锷. 高等数学教学漫谈[M]. 北京：化学工业出版社，1989.
LU E. Teaching of higher mathematics[M]. Beijing: Chemical Industry Press, 1989. (in Chinese)

[7] 汪林. 数学分析中的问题和反例[M]. 昆明：云南科技出版社，1990.
WANG L. The problem and counter example in mathematical analysis[M]. Kunming: Yunnan Science and Technology Press, 1990. (in Chinese)