

# 一类具有扰动的超混沌系统时延投影同步

鄢海舟, 盛立

(中国石油大学(华东)信息与控制工程学院, 山东青岛 266580)

**摘要:** 基于驱动-响应同步原理, 在同时考虑系统不确定参数、外部未知干扰及传输信道时间延迟的情况下, 研究了一类超混沌系统的时延投影同步问题。利用未知干扰的有界性及主动控制法, 给出了保证驱动系统与响应系统达到时延投影同步的控制器设计方案。最后通过数值仿真验证了结论的有效性。

**关键词:** 自动控制技术; 超混沌系统; 不确定参数; 外部干扰

**中图分类号:** TP 273      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1674-2850(2015)18-1943-10

## Lag projective synchronization of a class of hyperchaos system with disturbance

YAN Haizhou, SHENG Li

(College of Information and Control Engineering, China University of Petroleum (East China), Qingdao, Shandong 266580, China)

**Abstract:** Based on the principle of drive-response synchronization, the lag projective synchronization control problem is investigated for a class of hyperchaos system with uncertain parameters, uncertain external interference and channel time-delay. The lag projective synchronization controller is designed by using active control method and the characteristic of the limit of uncertain disturbance. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness of the results.

**Key words:** automatic control technology; hyperchaos system; uncertain parameters; external disturbance

## 0 引言

混沌同步在保密通信中具有很大的应用价值, 自1990年 PECORA 等<sup>[1]</sup>提出驱动-响应同步方法以来, 混沌同步问题得到了学者们的广泛关注与深入研究<sup>[2]</sup>。近年来, 一些学者提出并实现了反同步<sup>[3]</sup>、投影同步<sup>[4]</sup>、广义同步<sup>[5]</sup>等多种同步方式, 其同步控制方法包括反馈控制<sup>[6]</sup>, 自适应控制<sup>[7]</sup>, 变结构同步控制<sup>[8]</sup>等。

将混沌同步应用于通信保密时, 由于接收端和发射端不可避免地存在延迟, 研究具有延迟的同步更贴近实际<sup>[9]</sup>。为在通信中得到更高的可靠性, 人们发现将超混沌<sup>[10]</sup>以及比完全同步、反同步更泛化的投影同步<sup>[11]</sup>应用于通信中能很好地改善保密性。而目前, 有关具有扰动的超混沌系统的投影同步研究鲜有报道, 有必要进行深入的研究。

另一方面, 将混沌应用于通讯中还需解决另一个问题——参数不确定和外部干扰。由于工作环境的影响, 参数发生微小扰动是必须考虑的。文献<sup>[12]</sup>研究了在白噪声干扰下混沌神经网络的同步问题, 文献<sup>[13]</sup>用脉冲控制研究了驱动系统与响应系统参数干扰相同的情况下混沌完全同步。

基于上述讨论, 这里将同时考虑具有参数干扰和外部干扰以及时间延迟的超混沌投影同步问

**基金项目:** 高等学校博士学科点专项科研基金 (20120133120014)

**作者简介:** 鄢海舟 (1993—), 男, 本科生, 主要研究方向: 混沌系统同步

**通信联系人:** 盛立, 副教授, 主要研究方向: 随机系统、非线性系统控制. E-mail: shengli@upc.edu.cn

题。这里主要针对超混沌同步这一类问题，同时考虑了干扰等实际问题。综合反馈控制、非线性补偿以及利用误差的有界性、超混沌状态的有界性设计了有效的控制器，仿真实例验证了所得结论的有效性。

## 1 系统描述

考虑如下带有参数扰动和外部扰动的超混沌系统：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + f(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t), \quad (1)$$

其中， $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in R^n$  为系统的状态向量； $\mathbf{A}$  为系统的参数矩阵； $\Delta\mathbf{A}$  为参数干扰； $f(\mathbf{x}(t))$  为系统非线性向量； $\mathbf{w}(t) \in R^l$  为外部干扰； $\mathbf{D} \in R^{n \times l}$  为相关参数矩阵。

令式(1)为驱动系统，则相应的响应系统为

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{B})\mathbf{y}(t) + f(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{D}^y \mathbf{w}^y(t) + \mathbf{u}(t), \quad (2)$$

其中， $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T \in R^n$  为响应系统的状态向量； $\Delta\mathbf{B}$  为响应参数干扰； $f(\mathbf{y}(t))$  为响应系统非线性向量； $\mathbf{D}^y \in R^{n \times l}$ ， $\mathbf{w}^y(t) \in R^l$  为响应系统外部干扰参数矩阵。 $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T \in R^n$  是实现驱动系统(1)与响应系统(2)达到时延投影同步所设计的控制器。

与文献[12]不同，这里不要求驱动系统(1)与响应系统(2)具有一致的参数不确定性和外部扰动，相关结论具有更小的保守性。

**定义 1** 对于给定的投影比例矩阵  $\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ，若能使驱动系统(1)与响应系统(2)满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t - \tau)\| = 0, \quad (3)$$

则称驱动系统(1)与响应系统(2)达到了时延投影同步(其中， $\|\cdot\|$  为欧氏范数； $\tau$  为迟滞时间)。

若  $\mathbf{A}$  为单位矩阵，则驱动系统(1)与响应系统(2)实现了完全同步；若  $\mathbf{A}$  为负单位矩阵，则驱动系统(1)与响应系统(2)实现了反同步。

由定义 1 可知，误差信号为

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t - \tau). \quad (4)$$

这里所做的工作是设计控制器  $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T \in R^n$ ，使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = 0$ ，从而驱动系统(1)与响应系统(2)达到时延投影同步。

## 2 抗干扰控制器设计

这里利用未知扰动的有界性、状态反馈以及主动控制法来设计控制器  $\mathbf{u}(t)$ ，使驱动系统(1)与响应系统(2)达到时延投影同步。

假定驱动系统(1)与响应系统(2)中的未知干扰满足下列条件：

$$[\Delta\mathbf{A}(t), \Delta\mathbf{B}(t)] = \mathbf{E}[\mathbf{F}_A(t), \mathbf{F}_B(t)]\mathbf{H}, \quad (5)$$

$$\|\mathbf{F}_A(t)\| < 1, \quad \|\mathbf{F}_B(t)\| < 1, \quad (6)$$

$$|\Delta a_{ij}(t)| < \varepsilon_A, \quad |\Delta b_{ij}(t)| < \varepsilon_B, \tag{7}$$

$$|w_i(t)| < \varepsilon_w, \quad |w_i^y(t)| < \varepsilon_{w^y}, \tag{8}$$

其中,  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in R^{n \times n}$  为常矩阵;  $\Delta a_{ij}(t)$ ,  $\Delta b_{ij}(t)$  分别为参数干扰矩阵  $\Delta \mathbf{A}(t)$ ,  $\Delta \mathbf{B}(t)$  中的第  $i$  行第  $j$  列;  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_B$  分别为  $\Delta a_{ij}$ ,  $\Delta b_{ij}$  的绝对值的上界;  $w_i(t)$ ,  $w_i^y(t)$  分别为外部干扰列阵  $\mathbf{w}(t)$ ,  $\mathbf{w}^y(t)$  中的第  $i$  个元素;  $\varepsilon_w$ ,  $\varepsilon_{w^y}$  分别为  $w_i(t)$ ,  $w_i^y(t)$  绝对值的上界。

由式 (4) 可知, 驱动系统 (1) 与响应系统 (2) 的误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}(t - \tau) \\ &= (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{B})\mathbf{y}(t) - \mathbf{A}(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A})\mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{D}^y \mathbf{w}^y(t) - \\ &\quad \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{w}(t) + f(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{A}f(\mathbf{x}(t - \tau)) + \mathbf{u}(t) \\ &= (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{B})\mathbf{y}(t) - \mathbf{A}(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{e}(t)) + \mathbf{D}^y \mathbf{w}^y(t) - \\ &\quad \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{w}(t) + f(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{A}f(\mathbf{x}(t - \tau)) + \mathbf{u}(t) \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}(t) + (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{B} - \mathbf{A}(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A})\mathbf{A}^{-1})\mathbf{y}(t) + \mathbf{D}^y \mathbf{w}^y(t) - \\ &\quad \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{w}(t) + f(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{A}f(\mathbf{x}(t - \tau)) + \mathbf{u}(t). \end{aligned} \tag{9}$$

设计时延投影同步控制器为

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{e}(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{y}(t) - f(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{A}f(\mathbf{x}(t - \tau)) - \mathbf{L}(t)\mathbf{y}(t) - \mathbf{M}(t), \tag{10}$$

其中,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}(t)$ ,  $\mathbf{M}(t)$  为反馈系数, 且其取值在定理 1 中给出。

**定理 1** 若选取控制器 (10), 且满足

- a)  $\lambda_{\max}(\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{K}) + \sigma < 0$ , 且  $\sigma = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{E}\| \|\mathbf{H}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$ ;
- b)  $\mathbf{L}(t)$  中的第  $i$  行第  $j$  列元素为  $l_{ij} \operatorname{sgn}(y_j(t)) \operatorname{sgn}(e_i(t))$ , 且

$$l_{ij} = \varepsilon_B + |\lambda_i| \varepsilon_B \frac{1}{|\lambda_j|} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n);$$

- c)  $\mathbf{M}(t)$  中的第  $i$  个元素为  $m_i \operatorname{sgn}(e_i(t))$ , 且

$$m_i = \sum_{j=1}^n |d_{ij}^y| \varepsilon_{w^y} + |\lambda_i| \sum_{j=1}^n |d_{ij}| \varepsilon_w \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, l),$$

其中,  $\lambda_{\max}(\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{K})$  为矩阵  $\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{K}$  的最大特征值;  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为定义 1 给定的投影因子;  $\operatorname{sgn}$

为符号函数, 即  $l_{ij}$  为  $\varepsilon_B \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + |\lambda_i| \varepsilon_B \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} |\mathbf{A}^{-1}|$  中的第  $i$  行第  $j$  列;  $d_{ij}^y$ ,  $d_{ij}$  分别为外部干扰矩阵

$\mathbf{D}^y$ ,  $\mathbf{D}$  中的第  $i$  行第  $j$  列, 即  $m_i$  为  $|\mathbf{D}^y| \varepsilon_{w^y} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + |\mathbf{A}| |\mathbf{D}| \varepsilon_w \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$  中的第  $i$  个元素; 则误差系统 (4) 可以达到全

局渐近稳定, 即从任意初值出发, 驱动系统 (1) 与响应系统 (2) 在未知干扰情况下可达时延投影同步。

**证明:** 取 Lyapunov 函数为

$$V(t) = \frac{1}{2} e^T(t) e(t), \quad (11)$$

对其求导并将误差系统 (9) 及控制器 (10) 代入得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e^T(t) A(A + \Delta A) A^{-1} e(t) + e^T(t) (A + \Delta B - A(A + \Delta A) A^{-1}) y(t) + e^T(t) D^y w^y(t) - \\ &\quad e^T(t) A D w(t) + e^T(t) f(y(t)) - e^T(t) A f(x(t - \tau)) + \\ &\quad e^T(t) (K e(t) - (A - A A A^{-1}) y(t) - f(y(t)) + A f(x(t - \tau)) - L(t) y(t) - M(t)) \\ &= e^T(t) (A A A^{-1} + K) e(t) + e^T(t) A \Delta A A^{-1} e(t) + \\ &\quad e^T(t) (\Delta B - A \Delta A A^{-1}) y(t) - e^T(t) L(t) y(t) + \\ &\quad e^T(t) (D^y w^y(t) - A D w(t)) - e^T(t) M(t). \end{aligned}$$

记

$$\Omega_1 = e^T(t) (A A A^{-1} + K) e(t) + e^T(t) A \Delta A A^{-1} e(t), \quad (12)$$

$$\Omega_2 = e^T(t) (\Delta B - A \Delta A A^{-1}) y(t) - e^T(t) L(t) y(t), \quad (13)$$

$$\Omega_3 = e^T(t) (D^y w^y(t) - A D w(t)) - e^T(t) M(t), \quad (14)$$

则

$$\dot{V}(t) = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3. \quad (15)$$

首先, 证明  $\Omega_1 < 0$ , 由式 (5), (6), (12) 及定理 1 中 a) 知

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= e^T(t) (A A A^{-1} + K) e(t) + e^T(t) A \Delta A A^{-1} e(t) \\ &< \lambda_{\max} (A A A^{-1} + K) \|e(t)\|^2 + \|e^T(t)\| \|A\| \|\Delta A\| \|A^{-1}\| \|e(t)\| \\ &< (\lambda_{\max} (A A A^{-1} + K) + \|A\| \|E\| \|F_A\| \|H\| \|A^{-1}\|) \|e(t)\|^2 \\ &< (\lambda_{\max} (A A A^{-1} + K) + \|A\| \|E\| \|H\| \|A^{-1}\|) \|e(t)\|^2 \\ &= (\lambda_{\max} (A A A^{-1} + K) + \sigma) \|e(t)\|^2 < 0. \end{aligned}$$

故  $\Omega_1 < 0$  成立。

然后, 证明  $\Omega_2 < 0$ . 令  $\Delta L = \Delta B - A \Delta A A^{-1}$ , 则矩阵  $\Delta L$  中第  $i$  行第  $j$  列的元素为  $\Delta l_{ij}$ , 且由式 (8) 及定理 1 中 b) 知

$$|\Delta l_{ij}| = \left| \Delta b_{ij} - \lambda_i \Delta a_{ij} \frac{1}{\lambda_j} \right| < |\Delta b_{ij}| + \left| \lambda_i \Delta a_{ij} \frac{1}{\lambda_j} \right| < \varepsilon_B + |\lambda_i| \varepsilon_B \left| \frac{1}{\lambda_j} \right| = l_{ij}, \quad (16)$$

由式 (13) 及定理 1 中 b) 知

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= e^T(t) (\Delta B - A \Delta A A^{-1}) y(t) - e^T(t) L(t) y(t) \\ &= e^T(t) \Delta L y(t) - e^T(t) L(t) y(t) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n e_i(t) \Delta l_{ij} y_j(t) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n e_i(t) l_{ij} \operatorname{sgn}(y_j(t)) \operatorname{sgn}(e_i(t)) y_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n e_i(t) \Delta l_{ij} y_j(t) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |e_i(t)| l_{ij} |y_j(t)|, \end{aligned}$$

由式 (16) 知,  $|\Delta l_{ij}| < l_{ij}$ , 故  $\Omega_2 < 0$  成立。

最后, 证明  $\Omega_3 < 0$ . 令  $\Delta M = D^y w^y(t) - A D w(t)$ , 则列阵  $\Delta M$  中第  $i$  个元素为  $\Delta m_i$ , 且由式 (8) 及定理 1 中 c) 知

$$|\Delta m_i| = \left| \sum_{j=1}^n d_{ij}^y w_j^y - \lambda_i \sum_{j=1}^n d_{ij} w_j \right| < \left| \sum_{j=1}^n d_{ij}^y w_j^y \right| + \left| \lambda_i \sum_{j=1}^n d_{ij} w_j \right| < \sum_{j=1}^n |d_{ij}^y| \varepsilon_{w^y} + |\lambda_i| \sum_{j=1}^n |d_{ij}| \varepsilon_w = m_i, \quad (17)$$

由式 (14) 及定理 1 中 c) 知

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= e^T(t) (D^y w^y(t) - A D w(t)) - e^T(t) M(t) \\ &= e^T(t) \Delta M - e^T(t) M(t) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(t) \Delta m_i - \sum_{i=1}^n e_i(t) m_i \operatorname{sgn}(e_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(t) \Delta m_i - \sum_{i=1}^n |e_i(t)| m_i, \end{aligned}$$

由式 (17) 知  $|\Delta m_i| < m_i$ , 故  $\Omega_3 < 0$  成立。

从而,  $\dot{V}(t) = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 < 0$  成立, 又由式 (11) 可知  $V(t) > 0$ , 由李雅普诺夫稳定性理论<sup>[14]</sup>可知, 驱动系统 (1) 与响应系统 (2) 在未知干扰情况下可达时延投影同步, 证毕。

所设计的控制器 (10) 含有  $y(t)$ , 考虑到混沌系统的状态具有有界性, 故假定

$$|y_i(t)| < \rho_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

其中,  $\rho_i$  为响应系统 (2) 第  $i$  个状态变量绝对值的上界。

**推论 1** 若将控制器 (10) 变换成式 (19), 驱动系统 (1) 与响应系统 (2) 在未知干扰情况下仍可达时延投影同步。

$$u(t) = K e(t) - (A - A A A^{-1}) y(t) - f(y(t)) + A f(x(t - \tau)) - L_y(t) - M(t), \quad (19)$$

其中, 列阵  $L_y(t)$  中的第  $i$  个元素为  $\varsigma_i \operatorname{sgn}(e_i(t))$ , 且有  $\varsigma_i = \sum_{j=1}^n l_{ij} \rho_j$ ; 其他各矩阵均符合定理 1 所述。控制

器 (19) 可将  $L_y(t)$ ,  $M(t)$  合并成一项, 简化了控制器。

**推论 2** 若选取控制器 (10), 且反馈矩阵  $K$  满足

$$K = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_i + \lambda_{\max}(A A A^{-1}) + \sigma < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中,  $\lambda_{\max}(A A A^{-1})$  为  $A A A^{-1}$  的最大特征值, 同时满足定理 1 中 b), c); 则驱动系统 (1) 与响应系统 (2) 在未知干扰情况下可达时延投影同步。

推论 1 对控制器 (10) 进行了简化, 推论 2 使反馈矩阵  $\mathbf{K}$  很容易获得。

### 3 数值仿真

为验证所提方法的有效性, 利用仿真实例研究在具有干扰情况下超 Lorenz 系统的时延投影同步问题。考虑如下超 Lorenz 混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_4, \\ \dot{x}_2 = cx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3, \\ \dot{x}_4 = -x_2x_3 + rx_4, \end{cases} \quad (20)$$

当  $a=10$ ,  $b=\frac{8}{3}$ ,  $c=28$ ,  $-1.52 < r \leq -0.06$  时, 系统 (20) 处于超混沌状态; 取  $r=-1.5$  设驱动系统为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{D}w(t), \quad (21)$$

$$\text{其中, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ c & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \\ -x_2x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0.9 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}.$$

设参数干扰为

$$\Delta\mathbf{A} = \mathbf{E} \begin{bmatrix} 0.5\sin t & 0.5\cos t & 0 & 0.5\sin t \\ -0.5\sin 2t & 0.5\cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5\sin 3t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5\cos t \end{bmatrix} \mathbf{H}, \quad (22)$$

其中,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  均取  $4 \times 4$  的单位矩阵。

设响应系统为

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{B})\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) + \mathbf{D}^y w^y(t) + \mathbf{u}(t), \quad (23)$$

$$\text{其中, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ c & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_1y_2 \\ -y_2y_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^y = 0.9 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w^y(t) = \frac{1}{1+e^{-2t}}.$$

设参数干扰为

$$\Delta\mathbf{B} = \mathbf{E} \begin{bmatrix} -0.5\sin 2t & 0.5\cos(t+0.5) & 0 & 0.5\sin t \\ 0.5\sin t & 0.5\cos 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5\sin 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5\cos t \end{bmatrix} \mathbf{H}, \quad (24)$$

其中,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  均取  $4 \times 4$  的单位矩阵。

控制器由式 (10) 确定。设  $\varepsilon_A = \varepsilon_B = 0.5$ ,  $\varepsilon_w = \varepsilon_{w^y} = 1$ , 设延迟时间  $\tau = 0.5$ , 时延投影同步矩阵为

$A = \text{diag}(1, -1, -0.5, 0.5)$ . 设反馈阵  $K = \text{diag}(-14, -14, -14, -14)$ , 则定理 1 中的条件均满足. 取驱动系统 (21) 的初值为  $x(0) = [1, 2, 3, -1]^T$ , 响应系统 (23) 的初值为  $y(0) = [11, 12, 13, 10]^T$ ; 利用龙格库塔法进行仿真, 设置步长为 0.001, 下面为仿真结果.

由  $A = \text{diag}(1, -1, -0.5, 0.5)$  可知, 驱动系统 (21) 与响应系统 (23) 将达到给定比例因子的投影同步; 由图 1 可知, 各个状态达到了给定的投影比例.

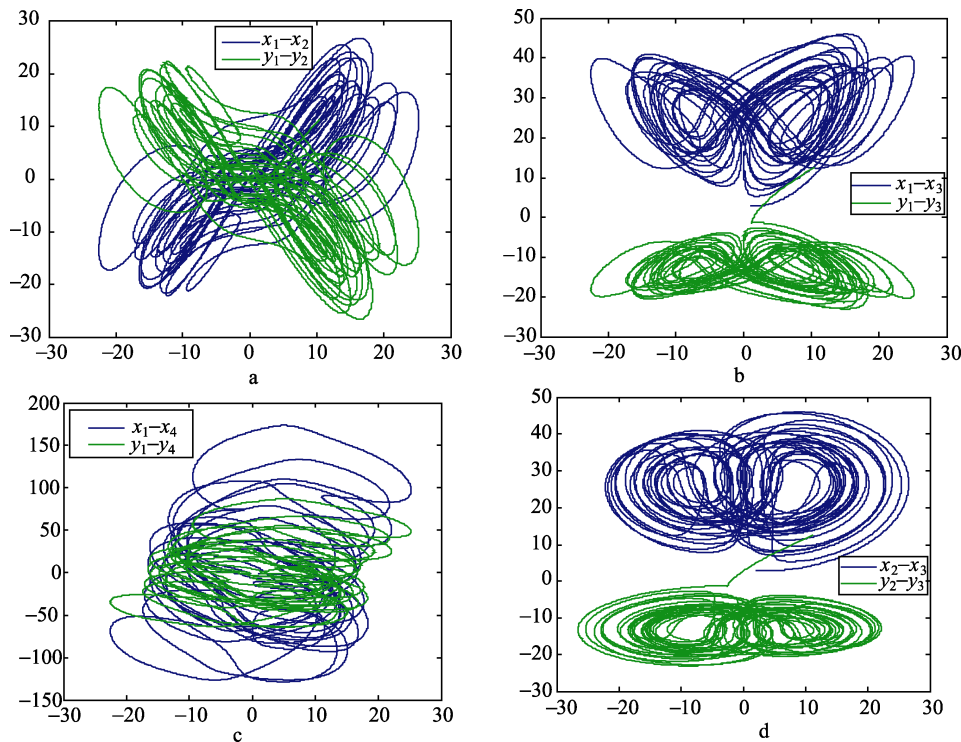


图 1 驱动系统和响应系统的相位图

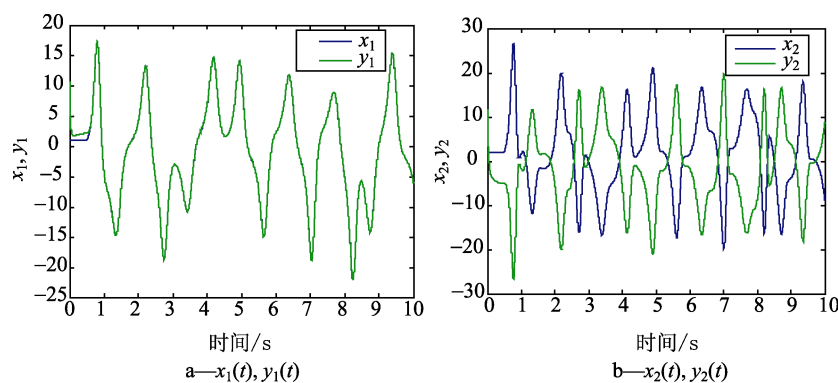
Fig. 1 Phase diagram of the drive system and response system

a— $x_1 - x_2, y_1 - y_2$  相位图; b— $x_1 - x_3, y_1 - y_3$  相位图; c— $x_1 - x_4, y_1 - y_4$  相位图; d— $x_2 - x_3, y_2 - y_3$  相位图

a- $x_1 - x_2, y_1 - y_2$  phase diagram; b- $x_1 - x_3, y_1 - y_3$  phase diagram;

c- $x_1 - x_4, y_1 - y_4$  phase diagram; d- $x_2 - x_3, y_2 - y_3$  phase diagram

由上面分析可知, 在未知干扰下, 驱动系统 (21) 与响应系统 (23) 在控制器 (10) 作用下达到了给定投影矩阵的时延投影同步, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - Ax(t - \tau)\| = 0$ .



a— $x_1(t), y_1(t)$

b— $x_2(t), y_2(t)$

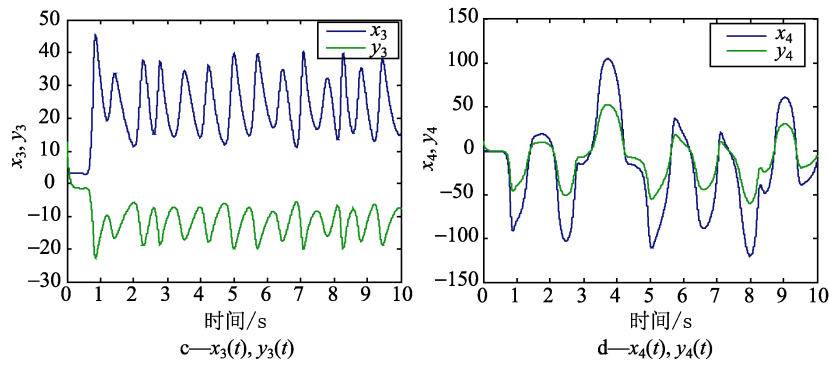


图 2 状态响应曲线

Fig. 2 State response curves

由图 2 可知，在控制器 (10) 的作用下，图 2a 表示驱动系统与响应系统状态  $x_1 - y_1$  达到了同步，图 2b 表示驱动系统与响应系统状态  $x_2 - y_2$  达到了反同步，图 2c 表示驱动系统与响应系统状态  $x_3 - y_3$  达到了比例系数为  $-0.5$  的同步，图 2d 表示驱动系统与响应系统状态  $x_4 - y_4$  达到了比例系数为  $0.5$  的同步。

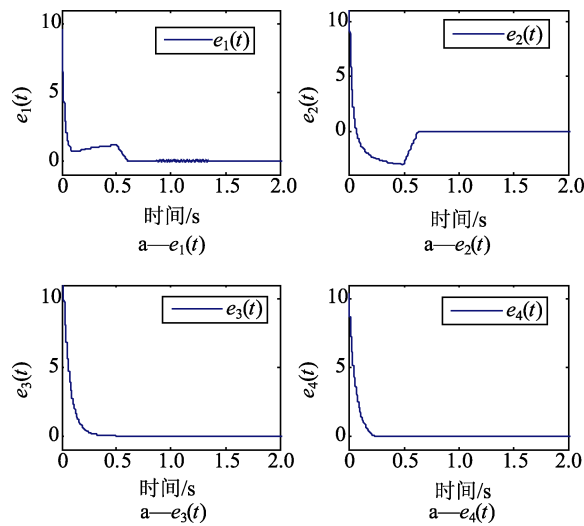


图 3 驱动系统与响应系统误差曲线

Fig. 3 Drive system and response system error curves

由图 3 可知，误差系统  $e(t) = [e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t)]^T$  快速收敛于零，表明控制器 (10) 使得驱动系统与响应系统能在干扰下达到时延投影同步。

下面进行仿真验证推论 1 中控制器 (19) 的有效性。所采用的系统和各矩阵的值依然为式 (20) ~ 式 (24) 所描述，只是控制器采用式 (19)。由响应系统 (23) 的各状态知， $|y_i(t)| < 25, (i=1,2,3), |y_4(t)| < 80$ ，故取  $\rho_i = 25, (i=1,2,3), \rho_4 = 80$ ，按照控制器 (19) 进行仿真。

由图 4 和图 2 比较可知，推论 1 中控制器 (19) 与控制器 (10) 均有效，都可以使驱动系统与响应系统在干扰下达到时延投影同步。

由图 5 可知，改进控制器 (19) 能使误差迅速稳定于零，表明驱动系统与响应系统在干扰下达到时延投影同步。



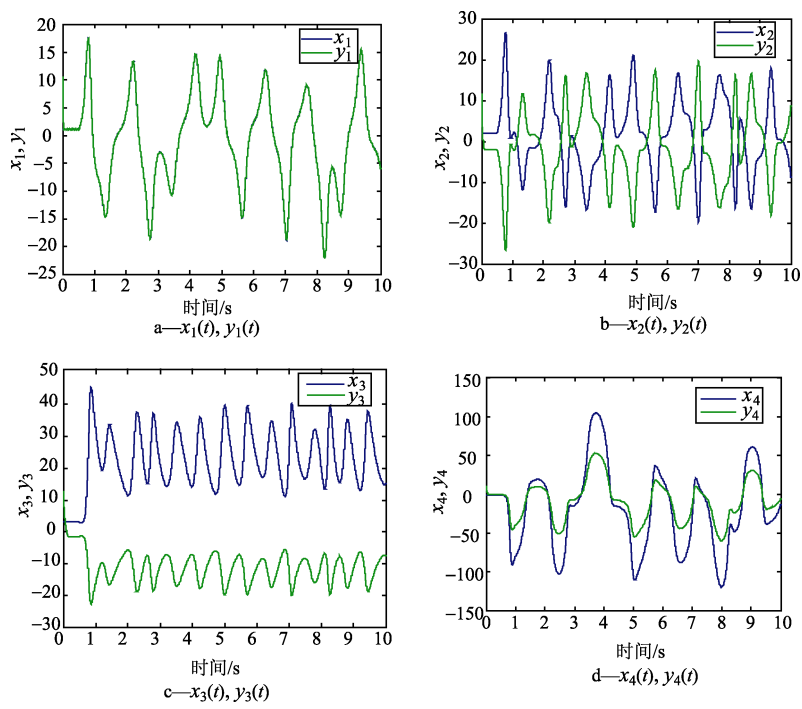


图 4 推论 1 控制器作用下状态响应曲线  
Fig. 4 State response curves under the corollary 1

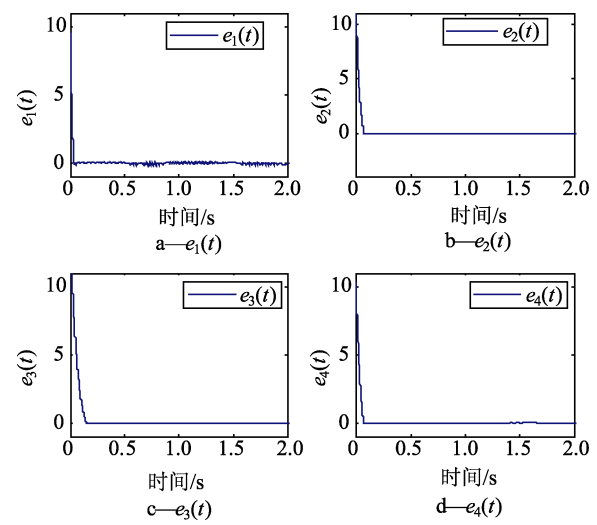


图 5 推论 1 控制器作用下误差曲线  
Fig. 5 Synchronization error curves under corollary 1

## 4 结论

针对一类具有随机参数干扰和外部干扰的超混沌系统，研究了一类超混沌在未知干扰下驱动系统与响应系统达到时延投影同步制问题。驱动系统的参数干扰与响应系统的参数干扰不要求相同。利用干扰的有界性，设计了有效的控制器使超混沌驱动系统与响应系统达到时延投影同步；并基于混沌状态的有界性给出了推论 1，使原控制器设计更为简单；为使控制器的反馈矩阵更容易选取，给出了推论 2。数值仿真验证了论文结论的有效性。

**[参考文献] (References)**

- [1] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 64(8): 821-827.
- [2] LIAO T L, HUANG N S. An observer-based approach for chaotic synchronization with applications to secure communications[J]. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 1999, 46(9): 1144-1150.
- [3] KIM C M, RIM S H, KEY W, et al. Anti-synchronization of chaotic oscillators[J]. *Physics Letters A*, 2003, 320(1): 39-46.
- [4] XU D L, LI Z G. Controlled projective synchronization in nonpartially-linear chaotic systems[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, 12(6): 1395-1402.
- [5] YANG X S. On the existence of generalized synchronization in unidirectionally coupled systems[J]. *Applied Mathematics Computation*, 2001, 122(1): 71-79.
- [6] CHENG C J, LIAO T L, YAN J J, et al. Exponential synchronization of a class of neural networks with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B*, 2006, 36(1): 209-215.
- [7] WANG Y W, GUAN Z H, WEN X J. Adaptive synchronization for Chen chaotic system with fully unknown parameters[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 19(4): 899-903.
- [8] ETEMADI S, ALASTY A, SALARIEH H. Synchronization of chaotic systems with parameter uncertainties via variable structure control[J]. *Physics Letters A*, 2006, 357(1): 17-21.
- [9] SHAHVERDIEV E M, SIVAPRAKASAM S, SHORE K A. Lag synchronization in time-delayed systems[J]. *Physics Letters A*, 2002, 292(6): 320-324.
- [10] ROSSLER O E. An equation for hyperchaos[J]. *Physics Letters A*, 1979, 71(2-3): 155-156.
- [11] 盛立, 高明. 统一混沌系统的自适应混合延迟投影同步[C]//第二十九届中国控制会议论文集. 北京, 2010: 2097-2101.  
SHENG L, GAO M. Adaptive mixed delayed projection synchronization for unified chaotic systems[C]//The 29th Chinese Control Conference Proceedings. Beijing, 2010: 2097-2101. (in Chinese)
- [12] 盛立, 杨慧中. 带随机扰动的参数不确定混沌神经网络的同步[J]. *系统仿真学报*, 2009, 21(22): 7109-7117.  
SHENG L, YANG H Z. The synchronization of chaotic neural networks with random disturbances[J]. *Journal of System Simulation*, 2009, 21(22): 7109-7117. (in Chinese)
- [13] 马铁东, 张化光. 一类参数不确定统一混沌系统的脉冲同步[J]. *系统仿真学报*, 2008, 20(18): 4923-4931.  
MA T D, ZHANG H G. A class of parameter uncertainty of impulsive synchronization of unified chaotic system[J]. *Journal of System Simulation*, 2008, 20(18): 4923-4931. (in Chinese)
- [14] 黄琳. 稳定性理论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1992.  
HUANG L. Stability theory[M]. Beijing: Peking University Press, 1992. (in Chinese)