

用于 FIR 滤波器的一种新型四阶海明窗设计

何小双, 李雅梅, 李玥东

(辽宁工程技术大学电气与控制工程学院, 辽宁葫芦岛 125105)

摘要: 提出一种基于线性四阶齐次理论改进的新型四阶海明 (Hamming) 窗, 它将三角函数的序列进行线性四阶组合, 并对其幅度条件进行线性归一化, 获得一种可调节参数的新型四阶窗函数, 从而得到一种新的算法以提高滤波器的设计精度, 满足严格的滤波条件。最后借助 Matlab 软件对本设计进行对比分析及计算验证, 证明了新型四阶海明窗的设计价值性。

关键词: 信息处理技术; 有限脉冲响应数字滤波器; 新型四阶海明窗设计; 线性四阶齐次理论; 设计精度
中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1674-2850(2015)06-0549-08

A new fourth-order of Hamming window design used for FIR filter

HE Xiaoshuang, LI Yamei, LI Yuedong

(Faculty of Electrical and Control Engineering, Liaoning Technology University, Huludao, Liaoning 125105, China)

Abstract: The article put forward a new improved fourth-order Hamming window design based on fourth-order homogeneous linear theory. It was a linear combination of trigonometric function sequence with the normalization of conditions for linear amplitude to obtain the fourth-order window function with a new type adjustable parameter, then a new algorithm to modify the design precision of the filter was obtained for meeting the requirement of stringent filter conditions. Finally, a comparison analysis and calculation for this design using Matlab software proved the value of the new fourth-order Hamming window design.

Key words: information processing technology; finite impulse response digital filter; a new fourth-order of Hamming window design; fourth-order homogeneous linear theory; design precision

0 引言

在当今数字滤波器领域, 传统的窗函数已经远远不能满足工程需求, 为进一步提高数字滤波器的设计优越性, 创造出严格的线性相位, 使其应用于数字通道、语音处理及自适应信号处理等领域, 滤波设计的阶数必须在考虑范围之内。

有限脉冲响应 (finite impulse response, FIR) 数字滤波器的设计方法有 3 种: 1) 窗函数法, 为时域设计法; 2) 频率抽样法, 为频域设计法; 3) 最优化方法, 为频域等波纹设计法^[1]。这里讨论了利用窗函数在数字滤波器中的设计思想与改进, 窗函数最为重要的思想在于截取理想冲击响应的方法逼近滤波器设计指标^[2]。

考虑滤波函数的阶数问题, 就必须研究信号的能量泄露^[2], 信号截断是产生能量泄露的主要原因,

作者简介: 何小双 (1993—), 男, 本科生, 主要研究方向: 测控技术与仪器

通信联系人: 李雅梅, 副教授, 主要研究方向: 智能检测与处理、计算机控制、智能控制理论. E-mail: liyamei518@163.com

窗函数 $W(t)$ 是一个频带无限的函数, 因此即使原信号 $X(t)$ 是有限带宽信号, 但在截断后也必然成为无限带宽的函数^[3], 即信号在频域的能量与分布被扩展了。又根据采样定理可知, 无论采样频率为多少, 信号一旦截断, 就不可避免地造成混叠, 因此信号截断必然导致一些误差。为减小这种误差, 选择合适的窗函数及阶数、改善数字滤波器的幅频特性、减少吉布斯现象^[4]成为数字滤波器设计的关键, 国内外都有过这方面的研究, 如文献^[5]中的 Fibonacci 序列、Golomb 序列、Hofasder-conway 序列、Triangular 序列产生的一种高阶滤波窗函数, 其设计出的滤波效果优于传统的经典设计方法, 这种窗函数的主瓣能量更为集中, 旁瓣更少。文献^[6]运用线性组合理论设计升余弦窗实现完全的超带宽, 这样的改进做法逻辑性强, 思路明确。文献^[7]将 Saramaki 窗同 Dolph-Chebysheve 窗利用高阶幂相乘的算法设计出的 FIR 数字滤波器, 其效果明显好于传统的海明窗。

1 海明窗函数的必要性

FIR 滤波器通常采用窗函数方法来设计。窗函数设计的基本思想为: 首先选择一个适当的理想选频滤波器(它总是具有一个非因果, 无限持续时间脉冲响应), 然后截取(加窗)它的脉冲响应得到线性相位和因果 FIR 滤波器。因此, 这种方法的重点是选择一个合适的窗函数和理想滤波器。它在通带上具有单位增益和线性相位, 在阻带上具有零响应。一个带宽的低通滤波器^[1]由下式给定:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-j\alpha\omega}, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad (1)$$

其中, ω_c 为截止频率; α 为旋转因子。

为从 $h_d(n)$ 得到一个 FIR 滤波器, 必须同时在两边截取 $h_d(n)$ 。而要得到一个因果线性相位滤波器, $h(n)$ 长度为 N , 必须有

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad \alpha = \frac{N-1}{2}. \quad (2)$$

这种操作叫做加窗, $h(n)$ 可以看作 $h_d(n)$ 与窗函数 $\omega(n)$ 的乘积:

$$h(n) = h_d(n)\omega(n),$$
$$\omega(n) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

根据 $\omega(n)$ 的不同定义, 可以得到不同的窗结构, 由窗结构可构造不同的窗函数。在频域中, 因果 FIR 滤波器响应 $H(e^{j\omega})$ 可由 $H_d(e^{j\omega})$ 和窗响应 $W(e^{j\omega})$ 的周期卷积得到, 即

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) \otimes W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\epsilon}) H_d(e^{j(\omega-\epsilon)}) d\epsilon, \quad (3)$$

其中, 截取函数的不同会导致窗函数的不同, 产生的吉布斯(Gibbs)现象也会导致不同的滤波效果。为避免此现象带来的影响, 选择一个理想可靠的窗函数非常关键, 以下为选择窗函数的3个重要指标: 1) 主瓣的幅度高而窄; 2) 旁瓣幅度下降迅速, 第一个毗邻主瓣的旁瓣与主瓣相比越小越好, 这更能体现滤波器衰减精度; 3) 截取的过渡带要尽量窄。但在实际生活中前面两条是相互矛盾的, 两者不可能同时达到最为理想的效果, 为减少由于加窗截断造成的波纹和过渡带宽的影响, 在工程设计中常用到海明窗和凯泽(Kaiser)窗。为进一步达到最佳的滤波效果, 通过对 FIR 滤波器响应 $H(e^{j\omega})$ 进行分析, 将基于海

明窗做进一步的改进与探讨，并拟出一个新型四阶海明窗模型。

2 新型四阶海明窗的原理

参考文献[2]和文献[4]，巴特利特（Bartlett）窗、汉宁（Hanning）窗、海明窗、布莱克曼（Blackman）窗是三角函数序列和矩形序列的线性组合。为减小旁瓣幅度，在上节的理论基础上，增加余弦的二次谐波分量和四次谐波分量，对窗函数改进后的形式如下：

$$\omega(n) = \left(a + b \cos \frac{2\pi n}{N-1} + c \cos \frac{4\pi n}{N-1} + d \cos \frac{8\pi n}{N-1} \right) R_N(n), \quad (4)$$

其中， a ， b ， c ， d 取值不同，所得到的窗函数也将有所不同，为计算方便，此窗函数选择奇数项作为研究对象。

由表 1 可知，本窗函数具备了以上窗函数的 4 种性质，数字滤波器的 2 个重要设计指标在这里得到了综合考虑，为进一步确定这种窗函数的指标算法，研究提出新型四阶海明窗的理论设计。

表 1 窗函数定向系数

Tab. 1 Directional coefficients of window function

窗型	a	b	c	d
矩形窗	1.00	0	0	0
汉宁窗	0.50	-0.50	0	0
海明窗	0.54	-0.46	0	0
新型四阶海明窗	0.42	-0.50	0.08	0.02

3 新型四阶窗函的理论支持

滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_d(n) \omega(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jn\omega}. \quad (5)$$

将式（4）代入式（5），得

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_d(n) \left(a + b \cos \frac{2n\pi}{N-1} + c \cos \frac{4n\pi}{N-1} + d \cos \frac{8n\pi}{N-1} \right) e^{-jn\omega}. \quad (6)$$

式（6）应满足第一类线性相位条件^[6]， $h(n) = h_d(d)\omega(n)$ 关于 $\frac{N-1}{2}$ 偶对称，且 N 多以奇数作为研究对象，那么技术指标 $H(e^{j\omega})$ 的幅度值可表达为

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega.$$

为进一步讨论 FIR 滤波器中海明窗的幅度衰减特性，可以换写为

$$H(\omega) = m(\omega)a + n(\omega)b + p(\omega)c + q(\omega)d, \quad (7)$$

$$m(\omega) = h_d \left(\frac{N-1}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h_d \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \cos n\omega, \quad (8)$$

$$n(\omega) = -h_d \left(\frac{N-1}{2} \right) - \sum_{n=1}^{N-\frac{1}{2}} 2h_d \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \cos \frac{2n\pi}{N-1} \cos n\omega, \quad (9)$$

$$p(\omega) = h_d \left(\frac{N-1}{2} \right) - \sum_{n=1}^{N-\frac{1}{2}} 2h_d \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \cos \frac{4n\pi}{N-1} \cos n\omega, \quad (10)$$

$$q(\omega) = h_d \left(\frac{N-1}{2} \right) + \sum_{n=1}^{N-\frac{1}{2}} 2h_d \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \cos \frac{8n\pi}{N-1} \cos n\omega. \quad (11)$$

滤波器的幅度条件为 $|H(\omega) - 1| \leq \delta_p$, 在阻带内满足 $|H(\omega)| \leq \delta_s$.

$$\begin{cases} 1 - \delta_p \leq m(\omega)a + n(\omega)b + p(\omega)c + q(\omega)d \leq \delta_s, \\ -\delta_s \leq m(\omega)a + n(\omega)b + p(\omega)c + q(\omega)d \leq 1 + \delta_p, \end{cases} \quad (12)$$

其中, δ_p 为通带的波纹; δ_s 为阻带波纹。为进一步对比改进的海明窗的不同之处, 取 a, b, c, d 大于零的值作为新型四阶海明窗的约束, 这样基于海明窗的改进过程就得以解决。为确定 a, b, c, d 这 4 个系数, 可根据最经典数学法中的小二乘法或迭代法进行求解。

$$\begin{cases} m(\omega)a + n(\omega)b + p(\omega)c + q(\omega)d + e = 1 + \delta_p, \\ m(\omega)a + n(\omega)b + p(\omega)c + q(\omega)d - f = 1 - \delta_s, \\ m(\omega)a + n(\omega)b + p(\omega)c + q(\omega)d + g = \delta_s, \\ m(\omega)a + n(\omega)b + p(\omega)c + q(\omega)d - h = -\delta_s. \end{cases} \quad (13)$$

因此, 通过上述理论分析, 由式 (8) ~ 式 (11) 可以得到式 (13) 的主值 $m(\omega), n(\omega), p(\omega), q(\omega)$, 继而求出本滤波器的关键技术指标 $H(e^{j\omega})$, 由通带波纹和阻带波纹可以求出列出优化的条件, 结合所得主值解此方程组 (13), 最终得到新型四阶海明窗的技术指标 a, b, c, d , 从而推出合理的新型四阶海明窗函数。

4 结合 Matlab 对新型四阶窗函数的实例分析

设计一个低通数字滤波器, 其技术指标如下: 通带的截止频率为 $\omega_p = 0.3\pi$; 阻带的截止频率为 $\omega_s = 0.5\pi$; 通带波纹 $R_p = 0.01$; 阻带纹路 $R_s = 0.01$. 可以得到, $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi$; 截止频率 $\omega_c = (\omega_p + \omega_s)/2 = 0.4\pi$. 利用传统的海明窗和新型四阶海明窗得到幅频特性如图 1 所示。

由图 1 滤波器的频率特性可知, 新型四阶海明窗函数的通带显得更为平缓, 两者阻带都有阻纹; 新型四阶海明窗的设计严格符合窗函数的 3 个重要指标, 与传统海明窗函数相比, 其过渡带高而窄, 且旁瓣的下降幅度迅速。为进一步分析传统海明窗与新型四阶海明窗在过渡带的衰减的相频特性关系, 研究模拟实际低通滤波器, 对传统和新型的 2 种窗函数在衰减时的相频特性图进行分析, 基于 Matlab 仿真得到如图 2 和图 3 所示的幅频特性, 更加清楚地看出新型四阶海明窗理论的优越性^[8]。此理论能减少滤波器设计中出现的吉布斯效应, 更容易达到理想的滤波效果。矩形窗、海明窗、新型四阶海明窗都是广义余弦窗的特殊形式。这些窗可以看作频率为 $0, 2\pi/(N-1), 4\pi/(N-1), 8\pi/(N-1)$ 的余弦序列的线性组合, 这里的 N 为窗的长度, 以下是基于 Matlab 语言生成窗函数的方法:

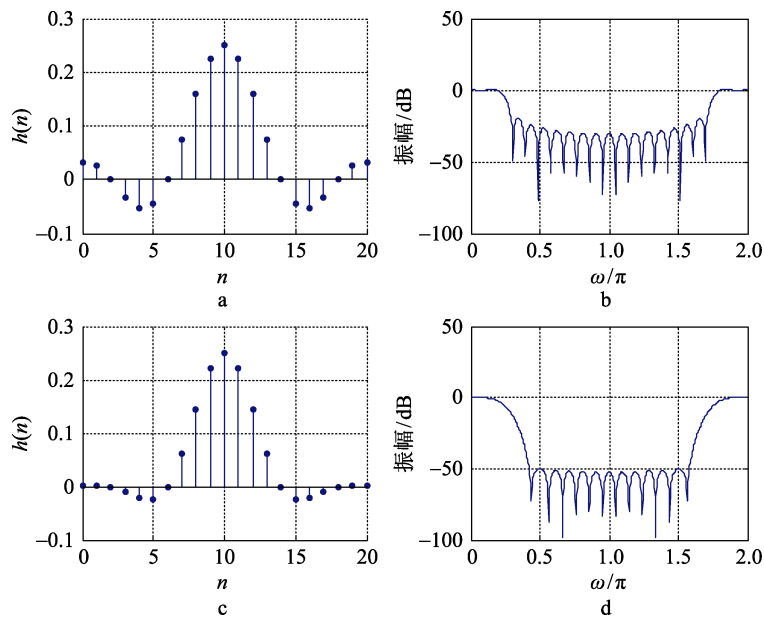


图 1 传统与新型四阶窗函数的幅度衰减特性比较

Fig. 1 Comparison of amplitude attenuation characteristics of traditional and the new one

a—海明窗设计；b—海明窗幅频特性；c—新型海明窗设计；d—新型海明窗幅频特性

a-Design of Hamming window; b-Amplitude frequency characteristics of Hamming window; c-New type design of Hamming window; d-Amplitude frequency characteristics of new type Hamming window

$$\text{ind} = (0 : n-1) \cdot 2 \cdot \pi / (n-1),$$

$$W = m - n \cdot \cos(\text{ind}) + p \cdot \cos(2 \cdot \text{ind}) - q \cos(4 \cdot \text{ind}),$$

其中， m ， n ， p ， q 定义的常数由式 (10)、式 (11)、式 (12) 与方程组 (13) 中主值 $m(\omega)$ ， $n(\omega)$ ， $p(\omega)$ ， $q(\omega)$ 的取模值得来，这种通过单个余弦项相加而成的窗函数，使对应频域中的低频部分以这样的方式组合，从而减低了吉布斯效应的震荡高度，同时由图 2 和图 3 的幅度响应 $|H(e^{j\omega})|$ 可以看出，与传统的海明窗相比，新型四阶海明窗只是增大了主瓣的宽度。

传统海明窗函数 $m = 0.54$ ， $n = 0.46$ ，而新型四阶海明窗为四项的广义余弦窗， $m = 0.42$ ， $n = 0.46$ ，增加而来的特征量为 $p = 0.08$ ， $q = 0.02$ 。表 2 为 4 种窗函数的频谱特征，由图 2 和图 3 的衰减和相频特性可以看出，传统海明窗数字滤波器在衰减过程中的衰减呈二次线性衰变，步伐缓慢，且阻带的最小衰减也不稳定，不能达到理想的衰减指标要求，而新型四阶海明窗函数的阻带衰减效果最好，节奏平稳，高达 -70 dB，可视为最理想的滤波设计。

虽然新型四阶海明窗的阻带衰减相比传统海明窗衰减为最大的 -70 dB，但其主瓣的宽度为 $9\pi/N$ 。设计选用新型四阶海明窗的理想低通滤波器，其归一化截止频率为 0.5（如图 2 和图 3 所示），设此信号含有多种成分的噪音直流信号，得到最原始的心电图（electrocardiograph, ECG）信号，如图 4 所示。

通过对 1 500 个人体的 ECG 信号数据经过加 2 种窗函数和线性组合，提供出了 10 个采样数据点分析，基于 Matlab 编程仿真，可得结论：传统的海明窗滤波后毛刺较多，主瓣幅度高而窄，旁瓣幅度下降迅速，吉布斯现象明显，而加用新型四阶海明窗后，其滤波效果得到了明显的改善，数据信号的峰值被缩小在传统海明窗范围之内，大幅改善了信号的信噪比，提高了 FIR 滤波器的设计精度。

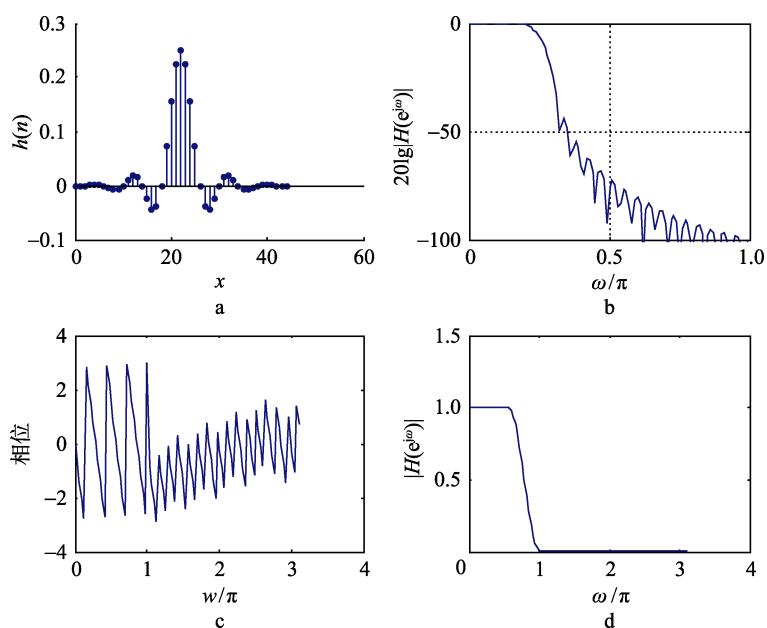


图2 理想低通滤波器加海明窗的幅度响应

Fig. 2 Amplitude responses of ideal low-pass filter with the Hamming window

a—实际低通滤波器; b—衰减特性; c—相频特性; d—幅频特性

a-Actual low-pass filtering; b-Attenuation characteristics; c-Phase frequency characteristics; d-Amplitude frequency characteristics

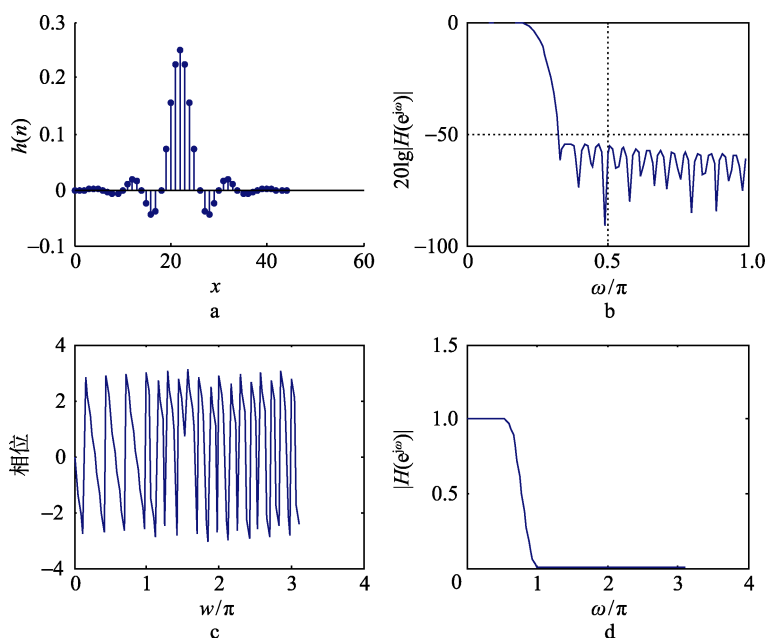


图3 理想低通滤波器加新型四阶海明窗的幅度响应

Fig. 3 Amplitude response of ideal low-pass filter with new fourth-order Hamming window

a—实际低通滤波器; b—衰减特性; c—相频特性; d—幅频特性

a-Actual low-pass filtering; b-Attenuation characteristics; c-Phase frequency characteristics; d-Amplitude frequency characteristics

表 2 窗函数关键技术指标

Tab. 2 Key technical indicators of window function

窗型	主瓣宽度	旁瓣峰值幅度/dB	过渡带宽 $\Delta\omega$	阻带最小衰减/dB
矩形窗	$4\pi/N$	-13	$1.8\pi/N$	21
汉宁窗	$8\pi/N$	-31	$6.2\pi/N$	44
海明窗	$8\pi/N$	-41	$6.6\pi/N$	53
新型四阶海明窗	$9\pi/N$	-42	$6.7\pi/N$	70

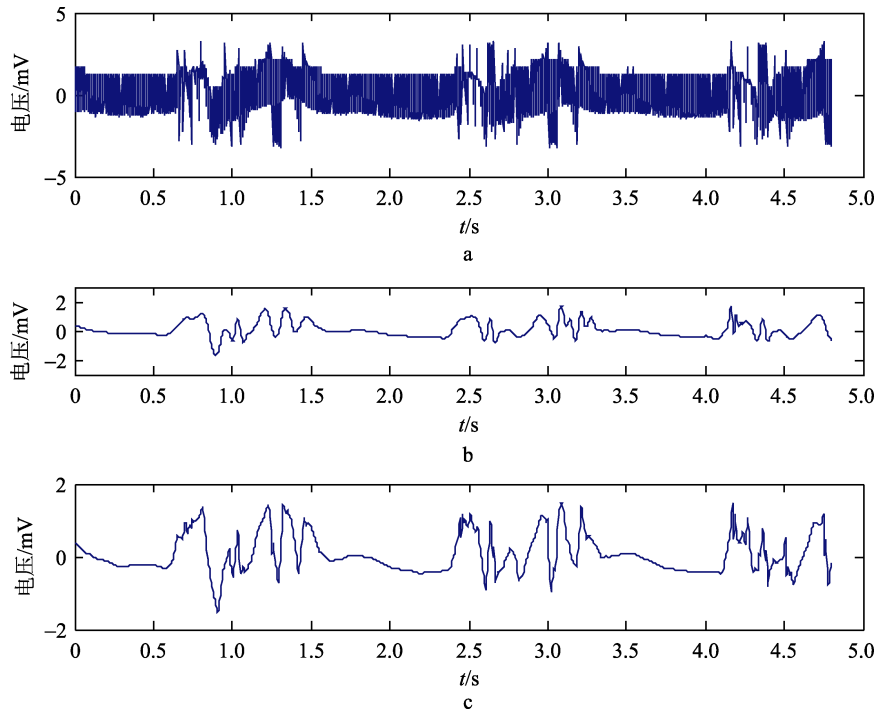


图 4 新型四阶海明窗与传统海明窗的滤波效果图

Fig. 4 Filtering effect pictures of new fourth-order of Hamming window and traditional Hamming window

a—人体采集的原始 ECG 信号；b—加用新型四阶海明窗函数进行 FIR 滤波图；

c—加用传统四阶海明窗函数进行 FIR 滤波图

a-Original ECG signals collected from the human body; b-Filter graph with a new fourth-order Hamming window function FIR; c-Filter graph with the traditional Hamming window function FIR

5 结论

研究基于窗函数原理，提出一种新型四阶窗，通过大量 Matlab 仿真可知：新型四阶海明窗在数字滤波器常用的加窗函数设计方法中，滤波效果良好，严格符合 FIR 数字滤波器设计的关键技术要求，同时结合了数字滤波器的技术要求指标和线性组合理论。因此，这种优于海明窗的新型四阶海明窗函数理论的设计是值得肯定的。

[参考文献] (References)

[1] 程佩青. 数字信号处理教程[M]. 4 版. 北京：清华大学出版社，2013.

- CHENG P Q. Digital signal processing course[M]. 4th ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013. (in Chinese)
- [2] 胡广书. 数字信号处理: 理论、算法与现实[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997.
- HU G S. Digital signal processing: theory, algorithms and reality[M]. Beijing: Higher Education Press, 1997. (in Chinese)
- [3] 丁玉美, 高西全. 数字信号处理[M]. 2版. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2001.
- DING Y M, GAO X Q. Digital signal processing[M]. 2nd ed. Xi'an: Xidian University Publishing House, 2001. (in Chinese)
- [4] 陈桂明, 张明照, 戚红雨. 应用 MATLAB 语言处理数字信号与数字图像[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- CHEN G M, ZHANG M Z, QI H Y. Digital signal processing and digital image processing using MATLAB[M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)
- [5] ARULALAN M R, JAMADANI H S, RAO A. Novel window functions for digital filters[C]//Proceedings of Fifth International Conference on Information Technology. New York: IEEE, 2008: 1184-1185.
- [6] RABINER L. Linear program design of finite impulse response (FIR) digital filters[J]. IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, 1972, 20(4): 280-288.
- [7] SARMAKI T. Adjustable windows for the design of FIR filter-a tutorial[C]//Proceedings of 6th Mediterranean Electrotechnical Conference. New York: IEEE, 1991: 28-33.
- [8] AVCI K, NACAROGLU A. A new window based on exponential function[C]//Proceedings of 2008 PhD Research in Microelectronics and Electronics. New York: IEEE, 2008: 69-72.