东西作为参照物时，在空中拍摄的100 km长的海岸线与放大了的10 km长海岸线的2张照片，看上去会十分相似。事实上，具有自相似性的形态广泛存在于自然界中，如：连绵的山川、飘浮的云朵、岩石的断裂口、布朗粒子运动的轨迹、树冠、花菜、大脑皮层等，MANDELBROT把这些部分与整体以某种方式相似的形体称为分形（fractal）。1975年，他创立了分形几何学（fractalgeometry），在此基础上，形成了研究分形性质及其应用的科学，称为分形理论（fractaltheory）。

1.2 分形分布的公式

分形分布可用如下幂指数分布定义[3]：

$$N=\frac{C}{r^D}, \tag{1}$$

其中，r为特征线度，如时间、长度等；N为与r有关的物体数目，如价格、指数等；C为待定常数；D为分维数。这里，r取为时间的编号，例如规定某一天为第1天，则有$r_1=1$，第2天$r_2=2$等。N为股票价格，例如：可以将N_1取为第1天的收市价格，N_2取为第2天的收市价格等。在目前一般应用的分形方法中，D为常数，这种分形可称为常维分形。它在双对数坐标上是一条直线。根据该直线上的任意2个数据点(N_i, r_i)和(N_j, r_j)，可以确定该段直线的分形参数，亦即分维数D和常数C. 将2个数据点的坐标代入式（1）后可以解出

$$D=\frac{\ln(N_i/N_j)}{\ln(r_j/r_i)}, \tag{2}$$

$$C=N_i r^D. \tag{3}$$

由于负数不能进行对数计算，所以当N_i中有负数时，必须将全部N值加一个常数以消除负数，亦即将全部数据点先进行平移处理。有时为使分析和预测的结果更好，也可以先将全部数据点进行平移处理。但是对于双对数坐标上非直线的函数关系，原有的分形方法就无法处理。为克服这一困难，采用了变维分形[4]的概念，亦即分维数D是可变的量。说明：对于N与R之间的任一函数关系$N=f(R)$，均可转化为分形分布$N=C/r^D$的形式。为此，只需令

$$f(R)=\frac{C}{r^D}, \tag{4}$$

解出r，可得

$$r=[C/f(R)]^{1/D}, \tag{5}$$

其中，R为与N对应的特征长度，亦即将R经过式（5）的变换得到分形分布的形式。

1.3 变换形成的分形

由于前面已经说明，任一函数关系均可转化为分形分布的形式。然而在实际应用中，往往只给出一些数据点，而函数关系则是未知的，因此变换的具体形式也就无法求出。在这种情况下，只能用尝试的方法寻找恰当的变换方法。既然是尝试的方法，就可以变换R，也可以变换N. 经过选择，发现了一种施行累计和的系列变换，可以将数据进行一系列变换，从中选出一种变换，使变换后的数据能与分形分布模型符合良好，亦即使变换后的数据能用分形分布处理。该法可简介如下。

第一步，将原始数据点$(N_i, r_i)(i=1, 2, \cdots, n)$绘于双对数坐标上，一般情况下它们不能与分形分布模型符合良好，于是可将N_i排成一个基本序列，即有

$$\{N_i\}=\{N_1, N_2, N_3, \cdots\} \quad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{6}$$

其他的序列均可以根据基本序列构造。

例如：构造一阶累计和序列S_1，$S1_1=N_1$，$S1_2=N_1+N_2$，$S1_3=N_1+N_2+N_3$，等。依此类推可

构造二阶、三阶累计和等，即有

$$\{S1_i\} = \{N_1,\ N_1 + N_2,\ N_1 + N_2 + N_3,\ \cdots\} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{7}$$

$$\{S2_i\} = \{S1_1,\ S1_1 + S1_2,\ S1_1 + S1_2 + S1_3,\ \cdots\} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{8}$$

$$\{S3_i\} = \{S2_1,\ S2_1 + S2_2,\ S2_1 + S2_2 + S2_3,\ \cdots\} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{9}$$

$$\{S4_i\} = \{S3_1,\ S3_1 + S3_2,\ S3_1 + S3_2 + S3_3,\ \cdots\} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{10}$$

第二步，建立各阶累计和的分形模型。

以一阶累计和为例，将数据点（$S1_i$，r_i）$(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 绘于双对数坐标上，即得离散的分形模型。例如根据 n 个数据点，可以得到由 $n-1$ 条直线组成的分段常维分形模型（这也是最简单的变维分形模型），各条直线的分形参数，可根据式（2）和式（3）计算（其中的 N 值用 $S1$ 值代替）。

第三步，选择效果最好的变换并确定其相应的分形参数。

将各阶累计和构成的数据点分别绘于双对数坐标上后与某一分形分布模型进行对比，即可选择效果最好的变换并确定其相应的分形参数。

2 中国石化股票价格的预测

将 2009 年 3 月 18 日至 4 月 13 日中国石化股票的收盘价作为原始数据，对 2009 年 4 月 14 日至 4 月 16 日的收盘中价进行预测。在表 1 中取 3 月 18 日为第 1 天，记为 r_1；3 月 19 日为第 2 天，记为 r_2；依次类推。S_1，S_2，S_3，S_4 分别记为一阶累计和、二阶累计和、三阶累计和与四阶累积和。

表 1 中国石化股票收盘价累计表

Tab. 1 Accumulative closing price of China petrochemical stock

日期	r_i	收盘价/元	S_1	S_2	S_3	S_4
3 月 18 日	1	8.26	8.26	8.26	8.26	8.26
3 月 19 日	2	8.41	16.67	24.93	33.19	41.45
3 月 20 日	3	8.61	25.28	50.21	83.40	124.85
3 月 21 日	4	8.64	33.92	84.13	167.53	292.38
3 月 22 日	5	8.71	42.63	126.76	294.29	586.67
3 月 23 日	6	8.66	51.29	178.05	472.34	1 059.01
3 月 24 日	7	8.89	60.18	238.23	710.57	1 769.58
3 月 25 日	8	8.93	69.11	307.34	1 017.91	2 787.49
3 月 26 日	9	8.81	77.92	385.26	1 403.17	4 190.66
3 月 27 日	10	8.74	86.66	471.92	1 875.09	6 065.75
3 月 28 日	11	8.81	95.47	567.39	2 442.48	8 508.23
3 月 29 日	12	8.89	104.36	671.75	3 114.23	11 622.46
3 月 30 日	13	8.89	113.25	785.00	3 899.23	15 521.69
3 月 31 日	14	9.00	122.25	907.25	4 806.48	20 328.17
4 月 1 日	15	8.62	130.87	1 038.12	5 844.60	26 172.77
4 月 2 日	16	8.70	139.57	1 177.69	7 022.29	33 195.06
4 月 3 日	17	8.83	148.40	1 326.09	8 348.38	41 543.44
4 月 4 日	18	9.31	157.71	1 483.80	9 832.18	51 375.62

由上述结果可以看出：如果对 N 值不进行处理，则得到的分维数 D 比较分散。而经过累计和处理之后，分维数 D 就变得比较接近，尤其是经过二阶累计和处理之后，由 18 个数据点组成的 17 条直线中，后 5 条直线的分维数尤其接近。选择由最后 2 个点组成的直线分形参数作为有代表性的分形参数，如表 2 所示。

表 2 分形维统计表

Tab. 2 Statistics of fractal dimension

D_0	D_1	D_2	D_3	D_4
−0.026 0	−1.013 0	−1.593 7	−2.006 5	−2.327 2
−0.058 0	−1.027 0	−1.726 8	−2.272 5	−2.719 4
−0.012 1	−1.021 9	−1.794 2	−2.424 6	−2.957 9
−0.036 2	−1.024 2	−1.837 1	−2.524 8	−3.120 9
0.031 6	−1.014 3	−1.863 6	−2.595 0	−3.239 5
−0.170 0	−1.036 9	−1.888 9	−2.649 2	−3.330 6
−0.033 6	−1.036 2	−1.907 6	−2.691 8	−3.402 9
0.114 9	−1.018 7	−1.918 5	−2.725 2	−3.461 6
0.075 7	−1.009 0	−1.925 7	−2.751 7	−3.509 9
−0.683 7	−1.051 8	−1.933 0	−2.773 7	−3.550 3
−0.103 9	−1.023 3	−1.940 4	−2.792 4	−3.584 7
−1.021 3	−1.021 3	−1.946 4	−2.808 5	−3.614 3
−0.165 9	−1.031 9	−1.953 0	−2.822 7	−3.640 2
0.625 3	−0.987 6	−1.953 1	−2.834 4	−3.662 9
−0.143 1	−0.997 3	−1.954 5	−2.844 4	−3.682 8
−0.244 7	−1.011 9	−1.957 6	−2.853 3	−3.700 5
−0.926 1	−1.064 5	−1.966 0	−2.862 1	−3.716 4

$$D = -1.966\,0,$$
$$C = 5.052\,5.$$

将 D 和 C 及 $r=19$，20，21 代入式（1），得

$$S2_{19} = 1\,650.2;\ S2_{20} = 1\,825.3;\ S2_{21} = 2\,009.$$

最后经过 2 步迭代，得到 $N_{19}=8.69$ 元（4 月 14 日收市值）；$N_{20}=8.7$ 元（4 月 15 日收市值）；$N_{21}=8.6$ 元（4 月 16 日收市值）.

而实际值为 $N_{19}=9.42$ 元；$N_{20}=9.61$ 元；$N_{21}=9.5$ 元。

3 结论

通过应用各阶累计和的方法，对原始数据进行变换，使得原来无法用分形方法处理的数据，变换成为可以用分形方法处理的数据。由最后的数据 $D=-1.966\,0$ 可以看出：这个维数是分数而不是整数，与以往用到的线性方法有很大差别。在使用分形方法进行经济预测的过程中，预测者能够充分发挥自身的主观能动性，利用一些经济常识进行灵活的调整，以求进一步提高预测精度。同时分形方法进行预测并不复杂，易于实现。

［参考文献］(References)

［1］ 金以文，鲁世杰. 分形几何原理及其应用[M]. 杭州：浙江大学出版社，1998.
JIN Y W，LU S J. The principle and application of fractal geometry[M]. Hangzhou：Zhejiang University Press，1998.（in Chinese）

［2］ MANDELBROT B B. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension[J]. Science，1967，156(3775)：636-638.

［3］ TURCOTTE D L. Fractals and chaos in geology and geophysics[M]. Cambridge：Cambridge University Press，1997.

［4］ 付昱华，付安捷. 用分形方法预测石油股票价格和指数[J]. 中国海洋平台，2002，17（6）：42-46.
FU Y H，FU A J. To predict the stock price and index of oil by using fractal method[J]. China Offshore Platform，2002，17(6)：42-46.（in Chinese）