

1 理论推导

1.1 变截面细杆的纵振动方程

对于均匀、各向同性材料构成的变截面杆，忽略机械损耗，并设平面纵波沿杆的轴向传播，即横截面上应力分布均匀。如图 1 所示，则变截面的动力学方程有^[1]

$$\frac{\partial(S \cdot \sigma)}{\partial x} dx = S \cdot \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dx, \quad (1)$$

其中， $S = S(x)$ 为杆的横截面积系数； $\xi = \xi(x)$ 为质点位移函数； $\sigma = \sigma(x) = E \frac{\partial \xi}{\partial x}$ 为应力函数； ρ 为材料密度； E 为杨氏模量。在简谐振动的情况下，式 (1) 可写成

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + k^2 x = 0. \quad (2)$$

式 (2) 为变截面细杆一维纵振动的波动方程。其中， $k = \omega/c$ ； k 为圆波数； ω 为圆频率； $c = (E/\rho)^{1/2}$ 为细棒中纵波波速，令^[5]

$$k'^2 = k^2 - \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{S}}{\partial x^2}, \quad \xi = S^{(-1/2)} \cdot y,$$

则式 (2) 可写为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + k'^2 y = 0. \quad (3)$$

式 (3) 的解为： $y = A \cos k'x + B \sin k'x$ 。

令 $\eta = \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{S}}{\partial x^2}$ ，对式 (3)，当且仅当 k' 或者 η 为常数时存在简谐解。对于指数形杆 $\eta = \beta > 0$ ，

对于悬链线形杆 $\eta = r > 0$ ，对于圆锥形杆 $\eta = 0$ 但 $\frac{\partial \sqrt{S}}{\partial x} \neq 0$ ，对于等截面的细棒 $\eta = 0$ 且 $\frac{\partial \sqrt{S}}{\partial x} = 0$ 。

1.2 悬链线形变幅杆的频率方程

对于悬链线形杆，面积函数为 $S(x) = S_1 \cosh^2 \gamma(l-x)$ ，截面半径 $R(x) = R_1 \cosh \gamma(l-x)$ ，其中， S_1, S_2, R_1, R_2 分别为 $x=0, x=l$ 处的横截面积和横截面半径； $\gamma = \frac{1}{l} \operatorname{arccosh}(\frac{1}{N})$ ； $N = \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$ ，则有 $\eta = -a^2 < 0$ 。同时，有式 (3) 的解为

$$\xi(x) = \frac{1}{\cosh \gamma(l-x)} (A \cos k'x + B \sin k'x) e^{i\omega t}. \quad (4)$$

应变分布函数为

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\gamma \sinh \gamma(l-x)}{\cosh^2 \gamma(l-x)} (A \cos k'x + B \sin k'x) + \frac{1}{\cosh \gamma(l-x)} (-A k' \sin k'x + B k' \cos k'x). \quad (5)$$

由式 (5) 及边界条件 $\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$ 可得到两端自由时的频率方程为

$$\tan k'l = -\frac{\gamma}{k'} \tanh(\gamma l). \quad (6)$$

同时，可得到谐振长度：

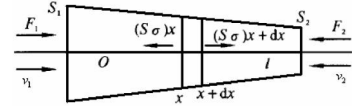


图 1 变截面细杆的纵振动
Fig. 1 Longitudinal vibration of variable cross-section rod

$$l_p = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{(k'l)^2 + [\operatorname{arccosh}(N)]^2}{\pi^2}} \quad (7)$$

1.3 变幅杆纵向频率的能量法修正

变幅杆做纵向振动时，由于泊松效应，必然伴有横向振动，大尺寸情形下，横向振动的影响不可忽略。从能量的角度分析，质点的横向振动必然引起整个系统动能的增加，进而增加系统的惯性，使变幅杆的等效分布参数发生变化，最终导致纵向振动的波速减慢、频率降低。而上述理论只考虑了纵振动时的能量，因此对大尺寸的变幅杆必然出现较大的误差。根据瑞利近似理论的假设：1) 形变前后质点处于同一平面，即纵向位移 $\xi_x(x, t)$ 与半径方向坐标 r 无关；2) 径向形变均匀，径向位移与半径成正比且 2 种振动同相位。

根据上面的假设，变幅杆的径向应变可写为

$$\epsilon_r = -\sigma\epsilon_x = -\sigma \frac{\partial \xi_x}{\partial x}, \quad (8)$$

其中， σ 为泊松系数； ϵ_r 为径向应变； ϵ_x 为纵向应变； ξ_x 为纵向位移。径向位移为

$$\xi_r = r \cdot \epsilon_r = -r\sigma \frac{\partial \xi_x}{\partial x}. \quad (9)$$

径向速度为

$$v_r = \frac{\partial \xi_r}{\partial t} = -r\sigma \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right) = -r\sigma \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (10)$$

其中， v_x 为纵向振速， $v_x = \frac{\partial \xi_x}{\partial t}$ 。

对于圆截面的变幅杆，质点振动位移关于中心轴对称，轴对称上的环带元如图 2 所示，其质量可表示为

$$dm = \rho dr ds = 2\pi\rho r dr dx. \quad (11)$$

则有，纵向振动引起的能量为

$$e_x = \iint \frac{1}{2} v_x^2 dm = \pi\rho \int_0^l v_x^2 \left(\int_0^{R(x)} r dr \right) dx; \quad (12)$$

横向振动引起的动能为

$$e_r = \iint \frac{1}{2} v_r^2 dm = \pi\rho\sigma^2 \int_0^l \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 \left(\int_0^{R(x)} r^3 dr \right) dx. \quad (13)$$

设系统纵向振动等效质量为 m_e ，计入横向振动引起动能增量后等效质量增量为 Δm_e ，则有

$$\frac{\Delta m_e + m_e}{m_e} = \frac{e_x + e_r}{e_x}. \quad (14)$$

根据共振频率与系统等效质量的平方根成反比，则有

$$\frac{f'_n}{f_n} = \sqrt{\frac{m_e}{m_e + \Delta m_e}} = \sqrt{\frac{e_x}{e_x + e_r}}, \quad (15)$$

其中， f_n 为未考虑横振动时的共振频率； f'_n 为考虑横振动后修正了的共振频率。即考虑横振动后，变幅杆的共振频率将减小。

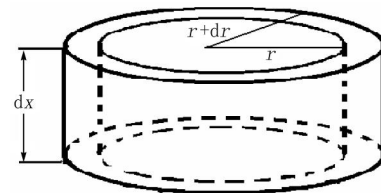


图 2 变幅杆的环带元
Fig. 2 The annulus element of transformer

1.4 悬链线形变幅杆纵向频率的修正

对于悬链线形变幅杆由式 (4) 及式 (10) 可得，纵向振速 v_x 及其对 x 的一阶偏导有

$$v_x = \frac{\partial \xi_x}{\partial t} = \frac{j\omega A}{\cosh\gamma(l-x)} \cos(k'x + \phi) e^{j\omega t}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{j\omega\gamma \sinh\gamma(l-x)A}{\cosh^2\gamma(l-x)} \cos(k'x + \phi) - \frac{j\omega A k'}{\cosh\gamma(l-x)} \sin(k'x + \phi) e^{j\omega t}, \quad (17)$$

其中， A 为常数； ϕ 为初相位。

将式 (16)、式 (17) 及 $R(x) = R_1 \cosh\gamma(l-x)$ 代入式 (12)、式 (13) 并取初相位 $\phi=0$ ，可得

$$e_x = -\frac{\pi\rho\omega^2 A^2 R_1^2}{4k'} (\sin 2k'l + 2k'l), \quad (18)$$

$$e_r = -\frac{\pi\rho\omega^2 A^2 R_1^4 \sigma^2}{4} \frac{(B \cdot \sinh 2\gamma l + C \cdot \sin 2k'l + D)}{(16k'\gamma^3 + 16k'^3\gamma)}, \quad (19)$$

其中， $B = 4k'\gamma^4 - 2k'^3\gamma^2 - 2k'^5$ ； $C = -2\gamma^5 + 2\gamma^3 k'^2 - 4\gamma k'^4$ ； $D = -4\gamma^5 k'l + 4k'^5\gamma l$ 。将式 (18)、式 (19) 代入式 (15)，可得

$$f'_n = f_n \cdot \left[\frac{1}{1 + \frac{\sigma^2 R^2}{8\gamma(k'^2 + \gamma^2)} E} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (20)$$

$$E = \frac{B \cdot \sinh 2\gamma l + C \cdot \sin 2k'l + D}{\sin 2k'l + 2k'l}, \quad (21)$$

其中， f_n 通过式 (6) 可以求得。式 (20) 即为半波长悬链线形变幅杆的频率修正公式。

2 有限元分析值与理论值的比较

为了验证文中理论的精确性，设计了一组变幅杆，将一维理论值及其修正值与用有限元分析软件 ANSYS 的模拟仿真值进行比较。材料选用 45 号钢，其密度 $\rho = 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，杨氏模量 $E = 2.16 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$ ，泊松系数 $\sigma = 0.28$ 。为便于比较，分别取变幅杆的长度 L 为 0.1, 0.12 m, R_1 , R_2 及半径比 N 做适当的变化。利用 ANSYS 模态分析时，采用三维模型自底向上法生成实体，利用扫掠法进行网格划分，选取 Block Lanczos 法求解，参数及模拟结果如表 1 所示。

表 1 悬链线形变幅杆的理论值与模拟值的比较

Tab.1 Modal analysis value compared with theoretical value of catenary transformer

R_1/m	R_2/m	N	L/m	R_1/L	f_1/Hz	f_2/Hz	f_3/Hz	$\Delta f_1/\%$	$\Delta f_2/\%$
0.04	0.02	2.0	0.12	0.27	21 119	21 032	20 800	1.533 7	1.115 4
0.05	0.02	2.5	0.12	0.33	21 185	21 026	20 503	3.326 3	2.550 8
0.04	0.01	4.0	0.10	0.40	25 660	25 414	25 352	1.210 0	0.240 0
0.05	0.01	5.0	0.10	0.50	25 762	25 229	23 848	8.030 0	5.790 0
0.06	0.02	3.0	0.12	0.50	21 216	20 991	19 839	7.167 7	5.403 8

表 1 中 f_1 为未考虑横振动时的共振频率； f_2 为利用能量法修正后的共振频率； f_3 为 ANSYS 软件模拟的频率； Δf_1 , Δf_2 分别为一维纵振动及修正后的结果与有限元分析结果比较的百分误差。

在用 ANSYS 有限元模态分析中发现，当 $R_1/L = 0.5$ 时，得到的振动模态中伴随有弯曲振动，且共振频率误差较大；当 R_1/L 再增大时，弯曲振动和扭转振动的效果越明显，因此瑞利近似理论的假设已不再适用；而取 $R_1/L = 0.4$ 时，未发现伴随有弯曲振动或扭转振动。因此为了保证瑞利理论能够适用，应取 $R_1/L \leq 0.4$ 。

3 结论

通过瑞利近似理论的假设对大尺寸悬链线形变幅杆的共振频率进行修正,给出了大尺寸悬链线形变幅杆的纵振动频率修正公式。将修正结果与一维理论对比,发现修正后的值更接近于有限元模拟仿真值。并发现当 $R_1/L > 0.4$ 时,振动时伴随有弯曲振动或扭转振动,此时瑞利理论不再适用。但与一维理论相比,修改后的值使用范围更大,因此对大尺寸长悬链线形超声变幅杆的工程计算具有一定的指导意义。

[参考文献] (References)

- [1] 林仲茂. 超声变幅杆的原理和设计[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
LIN Z M. The principle and design of ultrasonic horn[M]. Beijing: Science Press, 1987. (in Chinese)
- [2] 林书玉. 矩形横截面耦合振动复合变幅杆的设计[J]. 声学技术, 1992, 11 (3): 37~41.
LIN S Y. The design of large-dimension rectangular horns[J]. Technical Acoustics, 1992, 11(3): 37~41. (in Chinese)
- [3] 桑永杰, 林书玉. 基于能量修正法进行大尺寸指数型超声变幅杆准确设计[J]. 应用声学, 2007, 26 (4): 193~196.
SANG Y J, LIN S Y. Precise design of large dimension exponential horn based on energy modification method[J]. Applied Acoustics, 2007, 26(4): 193~196. (in Chinese)
- [4] 付志强, 林书玉. 大尺寸余弦形超声变幅杆的设计[J]. 声学技术, 2008, 27 (5): 765~768.
FU Z Q, LIN S Y. Design of cosine type ultrasonic transformers[J]. Technical Acoustics, 2008, 27(5): 765~768. (in Chinese)
- [5] 张小丽, 林书玉. 余弦形变幅杆的理论研究及模态分析[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2006, 34 (3): 48~51.
ZHANG X L, LIN S Y. Theoretical deduction and modal analysis of cosine horn[J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2006, 34(3): 48~51. (in Chinese)
- [6] 林书玉. 超声换能器的原理与设计[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
LIN S Y. The principle and design of ultrasonic transducer[M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese)