一类 2×2 分块矩阵的 Drazin 逆

刘喜富，杨 虎

（重庆大学数理学院，重庆 400030）

摘要：讨论了一类特殊的四分块矩阵的 Drazin 逆——当块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个幂等矩阵的情况下三角矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的 Drazin 逆。主要通过 2 种矩阵分解方式对 $\boldsymbol{M}$ 进行分解：一是对矩阵 $\boldsymbol{M}$ 进行块分解和行列变换，把矩阵 $\boldsymbol{M}$ 转化成一个便于求解其 Drazin 逆表达式的分块矩阵；二是将矩阵 $\boldsymbol{M}$ 分解成 2 个矩阵的乘积，然后利用矩阵乘积的 Drazin 逆计算公式计算 $\boldsymbol{M}$ 的 Drazin 逆表达式。并在新条件下，给出了矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的 Drazin 逆表达式，推广并补充了这方面的研究成果。

关键词：代数学；Drazin 逆；分块矩阵；指数；秩

中图分类号：O151.21 **文献标识码**：A **文章编号**：1674-2850(2009)07-1337-4

Drazin inverse for a class of 2×2 block matrices

LIU Xifu，YANG Hu

(*College of Mathematics and Physics*，*Chongqing University*，*Chongqing* 400030，*China*)

Abstract：This paper discusses the Drazin inverse of a special 2×2 block matrices：the Drazin inverse of the triangular matrix $\boldsymbol{M}$ when $\boldsymbol{A}$ is idempotent. Two main methods of matrix factorization are used to obtain the representation of the Drazin inverse of $\boldsymbol{M}$：one is using the methods of block factorization and row and column transposition on $\boldsymbol{M}$，then transforms $\boldsymbol{M}$ to a block matrix so that its representation for the Drazin inverse can be easily obtained；and another is decomposing $\boldsymbol{M}$ into the product of two matrices，then applies the formula of the Drazin inverse of the product of two matrices to compute the Drazin inverse of $\boldsymbol{M}$. Under some new conditions，the results extend some known results on Drazin inverse.

Key words：algebra；Drazin inverse；block matrices；index；rank

0 引言

设 $\boldsymbol{A}$ 是一复方阵，记 $\boldsymbol{A}$ 的 Drazin 逆为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}}$，由文献[1]知它存在并且唯一，且满足以下 3 个方程：

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^k,\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{D}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}},\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{D}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}},$$

其中，$k=\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的指数，是满足 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{k+1})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^k)$ 的最小非负整数。当 $k=1$ 时，称之为群逆，记为 $\boldsymbol{A}_g$；当 $k=0$ 时，就是一般意义上的逆 $\boldsymbol{A}^{-1}$，记 $\boldsymbol{A}^{\pi}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}}$.

CAMPBELL 等[2]提出了这样一个问题：寻求分块矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 的 Drazin 逆表达式，这里 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 为适当阶数的任意矩阵，但要求 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{D}$ 为方阵。关于这方面的研究是 Drazin 逆研究的一个热点，国内外已有很多这方面的文献。形如 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{pmatrix}$ 这样的四分块矩阵的 Drazin 逆，文献[3]～[5]做了相关的研究工作。在文献[3]～[4]的基础上，继续研究了此类矩阵的 Drazin 逆表达式，并得到了一些新的结论。

在叙述主要内容之前，先介绍几个重要的引理。

作者简介：刘喜富（1984－），男，博士研究生，主要研究方向：矩阵与数值代数

通信联系人：杨虎，教授，主要研究方向：统计线性模型、矩阵与数值代数、精算. E-mail：yh@cqu.edu.cn

引理 1[1] 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{P}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，且 $\boldsymbol{P}$ 可逆，则 $(\boldsymbol{PAP}^{-1})^{D}=\boldsymbol{PA}^{D}\boldsymbol{P}^{-1}$.

引理 2[1] 设矩阵 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}^{n\times m}$，则 $(\boldsymbol{BC})^{D}=\boldsymbol{B}[(\boldsymbol{CB})^{D}]^{2}\boldsymbol{C}$.

引理 3[4] 设 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{pmatrix}$，其中，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}^{n\times m}$，令 $r=\mathrm{ind}(\boldsymbol{BC})$，则

$$\boldsymbol{M}^{D}=\begin{bmatrix}Y_{\pi}(0) & [(\boldsymbol{BC})^{D}+Y_{\pi}(1)]\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}[(\boldsymbol{BC})^{D}+Y_{\pi}(1)] & \boldsymbol{C}\{-[(\boldsymbol{BC})^{D}]^{2}+Y_{\pi}(2)\}\boldsymbol{B}\end{bmatrix},$$

其中，$Y_{\pi}(n)=\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^{i}\boldsymbol{C}(n+2i,i)(\boldsymbol{BC})^{i}(\boldsymbol{BC})^{\pi}$，$n=0,1,2$.

引理 4[6] 设 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ \boldsymbol{C} & 0\end{pmatrix}$，其中，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，则

$$\boldsymbol{M}^{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{D} & 0\\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}^{D})^{2} & 0\end{bmatrix}.$$

引理 5[7] 设 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{pmatrix}$，其中，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}^{n\times m}$，则

$$\boldsymbol{M}^{D}=\begin{bmatrix}0 & (\boldsymbol{BC})^{D}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{BC})^{D} & 0\end{bmatrix}.$$

1 主要结果

下面给出了几种特殊的四分块矩阵的 Drazin 逆表达式。

定理 1 设 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，满足 $\boldsymbol{A}^{2}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，令 $r=\mathrm{ind}(\boldsymbol{ABC})$，则

$$\boldsymbol{M}^{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}Y_{\pi}(0) & [(\boldsymbol{BC})^{D}+\boldsymbol{A}Y_{\pi}(1)]\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}[(\boldsymbol{BC})^{D}+\boldsymbol{A}Y_{\pi}(1)] & \boldsymbol{CA}\{-[(\boldsymbol{BC})^{D}]^{2}+Y_{\pi}(2)\}\boldsymbol{B}\end{bmatrix},$$

其中，$Y_{\pi}(n)=\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^{i}\boldsymbol{C}(n+2i,i)(\boldsymbol{BC})^{i}(\boldsymbol{BC})^{\pi}$，$n=0,1,2$.

证明：因为 $\boldsymbol{A}^{2}=\boldsymbol{A}$，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

又因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，所以 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 可以写成

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{1} & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}_{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},\ \boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{1} & 0\\ 0 & \boldsymbol{C}_{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

因此，$\boldsymbol{M}$ 可以写成

$$\boldsymbol{M}=\widetilde{\boldsymbol{P}}\widetilde{\boldsymbol{M}}\widetilde{\boldsymbol{P}}^{-1},\tag{1}$$

其中，$\widetilde{\boldsymbol{P}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & 0\\ 0 & \boldsymbol{P}\end{pmatrix}$，$\widetilde{\boldsymbol{M}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & 0 & \boldsymbol{B}_{1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{B}_{2}\\ \boldsymbol{C}_{1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{C}_{2} & 0 & 0\end{bmatrix}$.

又因为

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&0&0&0\\0&0&\boldsymbol{I}&0\\0&\boldsymbol{I}&0&0\\0&0&0&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{B}_1&0&0\\\boldsymbol{C}_1&0&0&0\\0&0&0&\boldsymbol{B}_2\\0&0&\boldsymbol{C}_2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&0&0&0\\0&0&\boldsymbol{I}&0\\0&\boldsymbol{I}&0&0\\0&0&0&\boldsymbol{I}\end{pmatrix},$$

根据引理 1、引理 3、引理 5，有

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{D}}=\widetilde{\boldsymbol{P}}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}Y_{\pi}(0)&[(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{D}}+\boldsymbol{A}Y_{\pi}(1)]\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}[(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{D}}+\boldsymbol{A}Y_{\pi}(1)]&\boldsymbol{CA}\{-[(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{D}}]^2+Y_{\pi}(2)\}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{P}},\tag{2}$$

其中，$Y_{\pi}(n)=\sum\limits_{i=0}^{r-1}(-1)^i\boldsymbol{C}(n+2i,\ i)(\boldsymbol{BC})^i(\boldsymbol{BC})^{\pi}$，$n=0,\ 1,\ 2.$

将式（2）代入式（1），即得所要的结论。

推论 1 设 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{E}&0\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{E}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，令 $r=\mathrm{ind}(\boldsymbol{E})$，则

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}Y_{\pi}(0)&\boldsymbol{E}^{\mathrm{D}}+Y_{\pi}(1)\\\boldsymbol{EE}^{\mathrm{D}}+\boldsymbol{E}Y_{\pi}(1)&-\boldsymbol{E}^{\mathrm{D}}+\boldsymbol{E}Y_{\pi}(2)\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{M}^{\mathrm{D}})^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}^{\mathrm{D}}+Y_{\pi}(1)&-(\boldsymbol{E}^{\mathrm{D}})^2+Y_{\pi}(2)\\-\boldsymbol{E}^{\mathrm{D}}+\boldsymbol{E}Y_{\pi}(2)&\boldsymbol{E}^{\mathrm{D}}+(\boldsymbol{E}^{\mathrm{D}})^2+Y_{\pi}(1)-Y_{\pi}(2)\end{pmatrix},$$

其中，$Y_{\pi}(n)=\sum\limits_{i=0}^{r-1}(-1)^i\boldsymbol{C}(n+2i,\ i)\boldsymbol{E}^i\boldsymbol{E}^{\pi}$，$n=0,\ 1,\ 2.$

定理 2 设 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{C}&0\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{C}$，令 $r=\mathrm{ind}(\boldsymbol{C})$，则

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}Y_{\pi}(0)&\boldsymbol{A}[\boldsymbol{C}^{\mathrm{D}}+Y_{\pi}(1)]\\\boldsymbol{C}[\boldsymbol{C}^{\mathrm{D}}+Y_{\pi}(1)]&-\boldsymbol{C}^{\mathrm{D}}+\boldsymbol{C}Y_{\pi}(2)\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{M}^{\mathrm{D}})^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{C}^{\mathrm{D}}+Y_{\pi}(1)]&\boldsymbol{A}[-(\boldsymbol{C}^{\mathrm{D}})^2+Y_{\pi}(2)]\\-\boldsymbol{C}^{\mathrm{D}}+\boldsymbol{C}Y_{\pi}(2)&\boldsymbol{C}^{\mathrm{D}}+(\boldsymbol{C}^{\mathrm{D}})^2+Y_{\pi}(1)-Y_{\pi}(2)\end{pmatrix},$$

其中，$Y_{\pi}(n)=\sum\limits_{i=0}^{r-1}(-1)^i\boldsymbol{C}(n+2i,\ i)\boldsymbol{C}^i\boldsymbol{C}^{\pi}$，$n=0,\ 1,\ 2.$

证明：本定理的证明类似定理 1 的证明，在此省略。

定理 3 设 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&0\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{C}$，令 $r=\mathrm{ind}(\boldsymbol{BC})$，则

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{D}}+\boldsymbol{A}Y_{\pi}(1)+\boldsymbol{BC}Y_{\pi}(2)&\{(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})[(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{D}}]^2+(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{D}}+Y_{\pi}(1)+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})Y_{\pi}(2)\}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}[(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{D}}+Y_{\pi}(1)]&\boldsymbol{C}\{-[(\boldsymbol{BC})^{\mathrm{D}}]^2+Y_{\pi}(2)\}\boldsymbol{B}\end{pmatrix},$$

其中，$Y_{\pi}(n)=\sum\limits_{i=0}^{r-1}(-1)^i\boldsymbol{C}(n+2i,\ i)(\boldsymbol{BC})^i(\boldsymbol{BC})^{\pi}$，$n=1,\ 2.$

证明：考虑这 2 个矩阵 $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{C}&0\end{pmatrix}$和 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&0\\0&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，因为 $\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{C}$，所以 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{ST}$. 因此，由引理 2 得 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{D}}=\boldsymbol{S}[(\boldsymbol{TS})^{\mathrm{D}}]^2\boldsymbol{T}$. 而

$$TS = \begin{pmatrix} A & A \\ BC & 0 \end{pmatrix}.$$

根据定理 2，很容易得到本定理的结论。

2 结论

自四分块矩阵的 Drazin 逆这个问题提出以来，关于这方面的论文已有许多，但都要求块矩阵满足一定条件而得到其 Drazin 逆表达式，到目前为止还没有一个显式的表达式。所研究的一类特殊的四分块矩阵的 Drazin 逆表达式，即要求 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵。但比 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵更弱的条件，可以假设 $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A}) = 1$，这种情形下的四分块矩阵的 Drazin 逆和群逆在这里并没有研究，这将是今后的一个研究方向。

[参考文献] (References)

[1] BEN-ISRAEL A，GREVILLE T N E. Generalized inverse：theory and applications，seconded[M]. New York：Springer，2003.

[2] CAMPBELL S L，MEYER C D. Generalized inverse of linear transformations[M]. London：Pitman Publishing Limited，1979.

[3] CASTRO-GONZALEZ N，DOPAZO E，ROBLES J. Formulas for the Drazin inverse of special block matrices[J]. Appl. Math. Comput.，2006，174(1)：252～270.

[4] CASTRO-GONZALEZ N，DOPAZO E. Representations of the Drazin inverse for a class of block matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications，2005，400：253～269.

[5] 卜长江，赵杰梅，姚红梅. 某些分块矩阵的 Drazin 逆[J]. 哈尔滨工程大学学报，2008，29 (7)：745～748.
BU C J，ZHAO J M，YAO H M. Drazin inverse for some partitioned matrices[J]. Journal of Harbin Engineering University，2008，29(7)：745～748. (in Chinese)

[6] MEYER C D，ROSE N J. The index and the Drazin inverse of block triangular matrices[J]. SIAM J. Appl. Math.，1977，33(1)：1～7.

[7] 刘玉，曹重光. 体上某些分块矩阵的 Drazin 逆[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2004，24 (4)：112～114.
LIU Y，CAO C G. Drazin inverses for some partitioned matrices over skew fields[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University，2004，24(4)：112～114. (in Chinese)