

# Grüner 方程的向量场分析与电荷密度波

李连钢, 阮永丰

(天津大学理学院, 天津 300072)

**摘要:** Grüner 方程是研究电荷密度波的经典模型, 它是一个非线性微分方程, 没有解析解。本文通过非线性微分方程的广义旋转向量场理论, 证明 Grüner 方程在它所满足的物理条件下, 其解一定是周期性的, 并且是唯一的。在过阻尼情况下, 外场  $E$  的临界值是一个恒定值, 并且这个值就是方程中的  $E_0$ 。由此得到的对电荷密度波非线性电导描述的理论结果与 FLEMING 的经验公式完全相同。

**关键词:** 凝聚态物理; 电荷密度波 (CDW); 单摆; 非线性电导; Grüner 方程; 旋转向量场

**中图分类号:** O469      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1674-2850(2008)08-0793-7

## The analysis of vector field for the Grüner's equation and charge-density waves

LI Liangang, RUAN Yongfeng

(School of Sciences, Tianjin University, Tianjin 300072)

**Abstract:** The Grüner's equation is a classical model for studying the charge-density wave, which is a typical nonlinear differential equation. Although GRÜNER proposed the equation, it hadn't been solven rigorously. This paper analyzes the equation by the method of the rotating vector field theory. Using the mathematical analysis obtains the relation between the applied field  $E$  and the periodical solution of the equation, and the conclusion that in the over damping situation the  $E_0$  in Grüner's equation is just the critical value of the applied field  $E$ . The theoretical formulae derived from those, for describing nonlinear conductivity of charge density wave, is consistent with the experiential formula given by FLEMING.

**Key words:** condensed matter physics; chargedensity wave (CDW); pendulum; nonlinear conductivity; Grüner's equation; rotating vector field

## 0 引言

电荷密度波 (charge density wave, CDW) 是在低维材料中存在的一种特殊的电子输运现象。直到今天, 人们在高温超导材料中, 还经常观察到电荷密度波现象<sup>[1~2]</sup>。CDW 作为一种独特的导电现象, 有关它的理论研究一直被广大理论工作者所关注<sup>[3~7]</sup>。GRÜNER 等<sup>[8]</sup>最先提出了适用于单段情况的单粒子经典模型, 并给出方程

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \Gamma \frac{d\phi}{dt} + \sin\phi = \frac{E}{E_0} \quad (1)$$

其中,  $E_0 = (\lambda/2\pi)(m\omega_0^2/e)$  为常数;  $\Gamma = (\alpha_0\tau)^{-1}$  为摩擦系数;  $E$  为外场;  $\phi$  为电荷密度波的相位。式 (1) 被称为 Grüner 方程, 是非线性微分方程, 无法得到解析解。GRÜNER 假设在过阻尼情况下,  $\frac{d^2\phi}{dt^2} \rightarrow 0$ , 可以略去二阶微分项, 通过积分得到近似解<sup>[8]</sup>  $\sigma_{DC} = \sigma_0 \sqrt{E^2 - E_0^2}$ 。GRÜNER 的结果在高场的行为与实验的指数律非常接近, 但是, 这种省略显然可能导致方程的原有特性丢失, 其结果导致  $\sigma_{DC}$

**作者简介:** 李连钢 (1965—), 男, 博士, 主要研究方向: 凝聚态物理

**通信联系人:** 阮永丰, 教授, 主要研究方向: 晶体物理与光电材料, E-mail: ruanyf@tju.edu.cn

的导数在阙场 ( $E_0$ ) 附近发散。在文献[9]中, 曾经依据数值计算结果, 提出了 Grüner 方程在外场大于一定的阈值时具有稳定周期解的观点, 但是, 该文中对于 Grüner 方程的解之所以具有这种性质没有给出严格的数学证明。本文通过非线性微分方程的广义旋转向量场理论, 试图证明 Grüner 方程在它所满足的物理条件下, 其解一定是周期性的, 并且是唯一的。

对于非线性微分方程的研究, 有两种方法: 一种是古典方法, 试图得到方程的显式的解——用初等函数表示的封闭形式的解, 或用幂级数形式表示的解。这种方法在发展中存在困难, 有很大局限性。另一种方法, 是由 POINCARÉ (庞加莱)<sup>[10~13]</sup>在其论文《微分方程所定义的积分曲线》中所创立的微分方程定性分析理论方法, 这种方法将微分方程的解转化为一条在相空间上随时间演化的轨线。因此轨线是具有方向的曲线, 轨线上每一点的切线都成为一个向量。在相平面上, 这些向量构成微分方程的向量场。因此这种方法也称为向量场理论。随后, 很多科学家在此领域做出了发展和完善。1953年 DUFF<sup>[14]</sup>创立了旋转向量场理论。简单地说, 所谓“旋转向量场”是指: 当方程的某些参数发生改变时, 向量场中的向量随之发生旋转。在旋转向量场理论中, 要求向量场中的奇点不能发生移动。后来, SEIFERT 等<sup>[15~17]</sup>又将旋转向量场理论进一步发展到“广义旋转向量场理论”, 在广义旋转向量场理论中, 允许讨论向量场中的奇点发生移动的情况。

方程 (1) (Grüner 方程) 就是圆周摆方程。对于圆周摆方程, 以往人们一般关心的是其在锁相等方面的数学行为, 即主要从  $\Gamma$  的变化研究其解的行为。然而, 对于解的性质与外场  $E$  (即方程右端的常数项) 之间的依赖关系, 却没能引起人们更多的关注。在 CDW 理论方面, GRÜNER 等虽然提出了此方程, 但也没有用微分方程理论去分析解的性质以便推出相关结论。本文是从电场  $E$  角度出发, 即从方程右端的常数项  $\beta$  (在下文中定义:  $\beta = E/E_0$ ) 出发, 来研究方程 (1) 的解的性质, 这是本文的主要工作。

本文通过广义旋转向量场分析, 还得出了一个新的结论, 即在一般情况下,  $\Gamma$  都比较大 (过阻尼), 而此时无论  $\Gamma$  取什么数值, 使方程 (1) 具有周期解的电场  $E$  的临界值都将为一个恒定的值  $E_0$  (即  $\beta$  的临界值  $\beta_0 = 1$ )。这个结果在前面的工作<sup>[9]</sup>中没有明确提出过。

## 1 Grüner 方程的向量场分析

为了能够给出一个简洁明了的阐述, 本文略去过细的数学描述, 给出一个尽可能简明的论述思想。首先将方程解转化为相平面的表示形式, 引入一个新的变量  $z$ , 定义

$$z = \frac{d\phi}{dt} \quad (2)$$

为了书写简化, 并且令  $\beta = \frac{E}{E_0}$ , 这样可将方程 (1) 改写成  $\phi-z$  相平面上的方程组形式

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = \beta - \sin\phi - \Gamma \cdot z \end{cases} \quad (3)$$

这样每一个满足方程组的解, 则对应一条  $\phi-z$  相平面上的曲线, 曲线带有方向, 并称之为轨线。在相平面上, 除奇点之外任何地方的轨线彼此不相互交叉, 这是由解的唯一性确定的。在式 (3) 中, 满足  $\frac{dz}{dt} = 0$ , 且  $\frac{d\phi}{dt} = 0$  的点为相平面上的奇点, 奇点往往是轨线汇聚或发散的点。在  $0 \leq \beta \leq 1$  时, 方程组 (3) 存在以下奇点, 其坐标为  $(\phi_0, 0)$ , 即

$$\phi_0 = \arcsin\beta$$

$$\phi_n = n\pi + (-1)^n \phi_0 \quad (n \text{ 为整数}) \quad (4)$$

这些奇点可以分为两种，一种是焦点，记为  $B_k(\phi_{2k}, 0)$ 。其中  $k$  为整数，焦点是轨线螺旋进入或螺旋发散的地方。注意当  $\Gamma=0$  时， $B_k(\phi_{2k}, 0)$  成为“中心点”，但本文不讨论  $\Gamma=0$  的情况，只关心  $\Gamma>0$  的情况。图 1 (a) 给出焦点的轨线示意图。另一种是鞍点，用  $A_k(\phi_{2k-1}, 0)$  表示，鞍点是轨线的渐进点，有两条渐进线，但同时有四条轨线沿两条渐进线进入鞍点或从鞍点发出，如图 1 (b) 所示。这些奇点的性质对本文的讨论是很有用处的，后面会给出更详细的讨论。

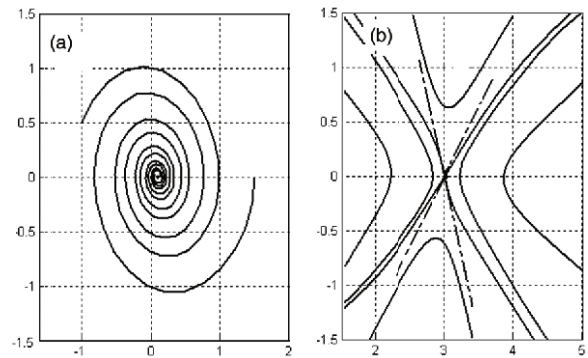


图 1 奇点的相图：(a) 焦点；(b) 鞍点  
Fig.1 Singularity: (a) focus; (b) saddle

相平面上各点的轨线切向量，构成向量场。为了表达方便，现将方程组 (3) 等号右侧的函数分别记为  $W(\phi, z) = z$ ,  $Q(\phi, z) = \beta - \sin\phi - \Gamma z$ 。场向量与  $\Phi$  轴之间的夹角表示为  $\theta$ ，显然有

$$\theta = \tan^{-1} \frac{Q(\phi, z)}{W(\phi, z)} \quad (5)$$

可以看出，随着参数  $\Gamma$  或  $\beta$  的变化，场向量都将随之发生旋转，由此构成旋转向量场<sup>[14]</sup>。值得注意的是，参数  $\Gamma$  改变时，奇点不发生移动；而参数  $\beta$  改变时，奇点将发生移动。数学上，对于参数变化同时引起奇点移动的情形，称为广义旋转向量场<sup>[15~17]</sup>。

显然，向量场的分布完全由函数  $W(\phi, z)$  和  $Q(\phi, z)$  决定，而且， $W(\phi, z)$  和  $Q(\phi, z)$  都是关于  $\phi$  的周期函数，其周期为  $2\pi$ 。因此，相平面上的向量场分布也将呈现出周期性。研究轨线性质时，只需研究一个  $2\pi$  情况即可，其它地方情况可以进行周期延拓，如图 2 所示。这个系统完全可以卷成一个以  $2\pi$  为周期的柱面，所以数学上称为柱面系统。在柱面系统上，从某一点发出的轨线，如果能够进入此点的下一个周期点，在卷起的柱面上，这条轨线将绕柱面一周后回到该点，形成一个封闭的环轨线，那么这条轨线就成为周期解的轨线。这里要证明的是，Grüner 方程解的轨线就有具有这样的性质。

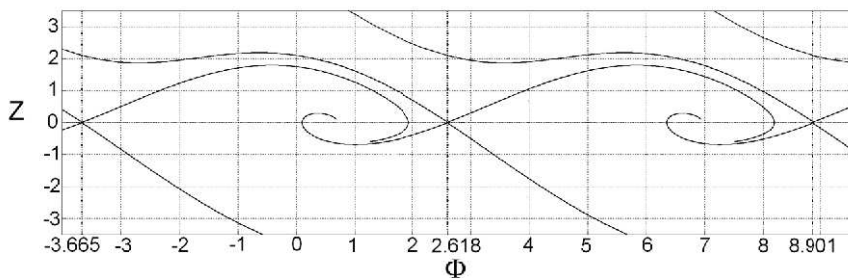


图 2 相平面上周期分布的轨线  
Fig.2 Trajectories distributed periodically on phase plane

方程组 (3)，在  $\Gamma=0$ ,  $\beta=0$  时，将变为

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = -\sin\phi \end{cases} \quad (6)$$

方程组 (6) 就是著名的 sin-Gordon 方程, 即:  $\frac{d^2\phi}{dz^2} + \sin\phi = 0$ 。它是可解的, 可以得到如下一个解

$$z = \sqrt{2(\cos\phi + 1)} \quad (7)$$

它对应轨线  $L_0$ , 连接两奇点  $A_0(\phi_{-1}, 0)$  和  $A_1(\phi_1, 0)$ , 如图 3 所示。

奇点  $A_0(\phi_{-1}, 0)$  和  $A_1(\phi_1, 0)$  互为周期点, 轨线  $L_0$  在柱面上是一个封闭的环, 它是一个周期解。

当保持  $\beta=0$ , 随着  $\Gamma$  增加, 通过旋转向量场方法进行分析, 可以发现轨线  $L_0$  将发生向内的卷曲变为轨线  $R$ , 如图 3 所示。这时轨线  $R$  不再是周期解的轨线。但同样通过分析得出, 给定一个  $\Gamma > 0$ , 随着  $\beta$  的增加, 即使奇点  $A_0(\phi_{-1}, 0)$  发生移动, 从  $A_0$  发出的轨线  $R$  也将会向外伸展, 同时奇点  $A_1(\phi_1, 0)$  将向左移动, 最终可以证明轨线  $R$  将会再次进入奇点  $A_1$ , 轨线  $R$  将会变成柱面系统上的封闭的环, 形成一个周期解, 如图 4 所示。

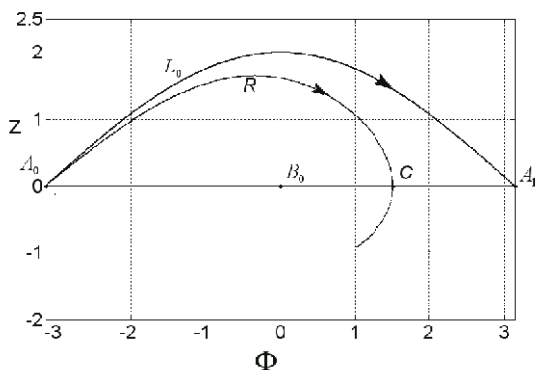


图 3 轨线图  
Fig. 3 Trajectories

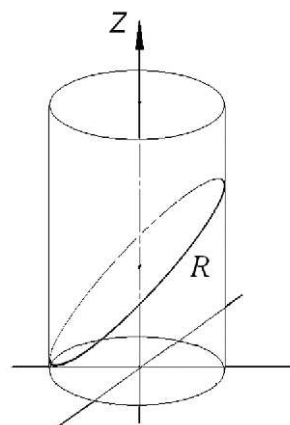


图 4 柱面上的轨线图  
Fig. 4 Trajectories on the cylinder

换句话说, 对于方程组 (3) 任意给定一个  $\Gamma > 0$ , 则一定存在一个  $\beta_0$ , 当  $\beta = \beta_0$ , 方程组 (3) 具有从  $A_0$  发出并能回到  $A_1$  点的柱面上的闭轨线, 并称此轨线为临界周期解, 称  $\beta_0$  为使方程具有周期解的临界  $\beta$  值。运用旋转向量场的方法可以证明,  $\beta_0$  是  $\Gamma$  的单值函数, 即给定任意  $\Gamma > 0$ , 则只有唯一的一个这样的  $\beta_0$ 。而且还可以证明: 当  $\beta \geq \beta_0$ , 方程组 (3) 有周期解; 当  $\beta < \beta_0$ , 方程组 (3) 没有周期解, 相平面上的所有轨线最终都将进入焦点  $B_k(\phi_{2k}, 0)$ 。

本文还可以证明, 方程组 (3) 的周期解只有一个。要想证明这个结论并不困难, 只需运用下面给出的定理 1 就不难得到, 证明时注意使用相平面上的轨线彼此互不交叉的性质即可。

**定理 1** 如果方程组 (3) 存在周期解  $z(\phi) = z(\phi + 2\pi)$ ,  $\phi \in (-\infty, +\infty)$ , 则必满足

$$\int_{\phi}^{\phi+2\pi} z(\phi) d\phi = \frac{2\pi\beta}{\Gamma} \quad (8)$$

定理 1 的证明很简单, 由方程组 (3) 得到下式

$$\frac{dz}{d\phi} = \frac{\beta - \sin\phi}{z} - \Gamma \quad (9)$$

对式 (9) 从  $\phi$  到  $\phi + 2\pi$  积分, 并注意到  $z(\phi)$  周期性, 即可得到式 (8)。这个定理是一个很有用的定理, 后面的物理讨论中还会用到。

根据微分方程的向量场理论可以证明, 方程组 (3) 的周期解还是一个稳定的周期解。因为它所对应的闭环特征值小于 0, 是一个稳定的极限环<sup>[18]</sup>, 也就是稳定周期解。所谓稳定周期解, 是在此轨线附近的其它轨线都将进入这条周期解的轨线。这在物理上是很有意义的, 后面将详细讨论。

从方程组 (3) 中  $\frac{d\phi}{dt} = z$  可以看出, 当  $z > 0$  时, 即在  $\Phi$  轴的上方, 轨线行进方向从左向右; 当  $z < 0$  时, 即在  $\Phi$  轴的下方, 轨线行进方向从右向左。因此, 如果轨线是上面所说的周期轨线, 要么位于  $\Phi$  轴上方, 要么位于  $\Phi$  轴下方, 是不可能穿过  $\Phi$  轴。又根据定理 1, 可以断定方程组 (3) 的周期解是大于 0 的周期解。

这里已经知道,  $\beta_0$  是  $\Gamma$  的单值函数, 即  $\beta_0 = \beta_0(\Gamma)$ 。进一步分析可以发现, 如果已知  $\beta_0(\Gamma_1) = 1$ , 又有  $\Gamma_2 > \Gamma_1$ , 则有  $\beta_0(\Gamma_2) = 1$ 。也就是说, 只要  $\Gamma$  足够大 (过阻尼情况), 无论  $\Gamma$  为何值, 产生临界周期解的临界值  $\beta_0$  将恒为 1。换句话说, 对应原方程 (1) 的具有周期解的临界电场值恒为  $E_0$ 。这个新的结论, 在以前文章是没有明确的<sup>[9]</sup>, 只是作为一种近似, 本文得到了一个明确的结论。

## 2 结果讨论

从上面的分析, 可以得到本文所关心的结论: 方程组 (3) 具有临界值  $\beta_0$ , 当  $\beta \geq \beta_0$ , 方程组 (3) 有唯一的、稳定的、大于零的周期解。这表明, 无论初始状态如何, 其最终运动形式都将趋近于唯一正向的周期运动, 如图 5 所示。若  $\beta < \beta_0$ , 方程组 (3) 不再有周期解。实际上, 此时相平面上任何一条轨线, 都将进入鞍点或焦点, 如图 6 所示。这里的焦点是稳定的, 而鞍点是不稳定的, 受到扰动将会离开鞍点, 最终所有轨线都将进入焦点。从物理角度看, 不管初始状态如何, 系统达到稳定状态后, 电荷密度波将静止在稳定的平衡点 (焦点) 上。

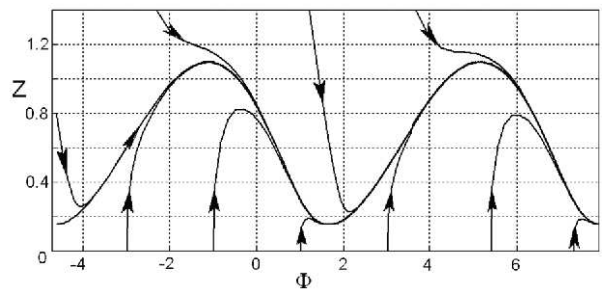


图 5 稳定的周期轨线图  
Fig. 5 The stable trajectory with a period

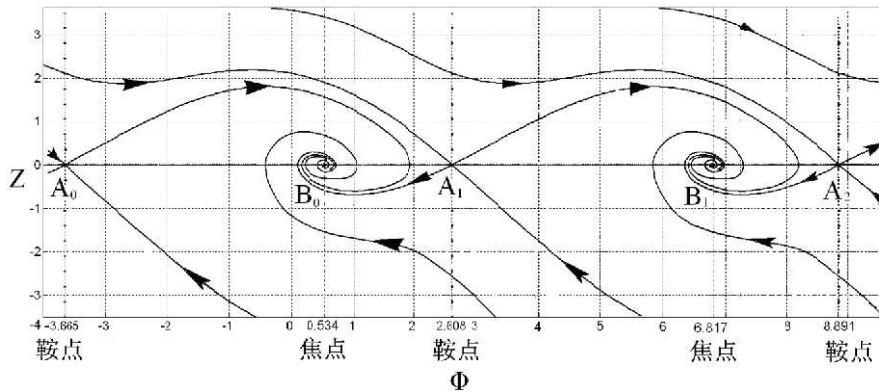


图 6 非周期轨线图  
Fig. 6 The nonperiodic trajectories

通过分析可知, 存在一个最小值  $\Gamma_{\min}$ , 当  $\Gamma \geq \Gamma_{\min}$  时, 临界值  $\beta_0$  将恒为 1。关于最小值的具体数值, URABE<sup>[19]</sup> 通过数值计算给出的结果为  $\Gamma_{\min} = 1.193$ 。根据 PORTIS<sup>[20]</sup> 的实验值  $\omega_0 \approx 2\pi \times 210$  MHz,  $\tau = 1.3 \times 10^{-10}$  s, 可以得出  $\Gamma = 5.83$ 。可以看出, 实际值远远大于最小值  $\Gamma_{\min}$ , 也就是说在通常情况下,  $\beta_0 = 1$ , 对应的临界电场值恒为  $E_0$ 。

当外场大于  $E_0$  时, 从上面分析可以知道, 方程将有稳定的周期解, 并且满足定理 1, 即

$$\frac{2\pi E}{\Gamma E_0} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{dt} d\phi \quad (16)$$

其中, 令  $\frac{d\phi}{dt} = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_c + \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_a$ , 这样只要取

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_a d\phi = \frac{1}{\Gamma} \quad (17)$$

则有

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_c = \frac{E - E_0}{\Gamma E_0} \quad (18)$$

$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_c$  为一个恒定值代表 CDW 整体滑移速度, 是对直流电导有贡献的部分;  $\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_a$  为周期变化的部分, 是产生窄带噪音的来源。将这些结论与 PORTIS<sup>[18]</sup> 多分段理论相结合, 考虑各个分段之间由于速度的不同将产生相互之间的挤压和拉伸, 其中  $\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_a$  的直流分量, 即平均速度

$$\left\langle \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_a \right\rangle = \frac{1}{\Gamma} \quad (19)$$

它将转化为固定形变而失去对电流的贡献。而 CDW 全体将以一个共同速度移动, 即得到多段 CDW 的整体滑行速度, 其为

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{c, \text{CDW}} = \frac{1}{\Gamma E_0} (E - E_T) e^{-\frac{E_0}{E - E_T}} \quad (20)$$

从而得到非线性电导率

$$\sigma_{DC} = \frac{nev_{\text{CDW}}}{E} = \sigma_0 \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) e^{-\frac{E_0}{E - E_T}} \quad (21)$$

窄带噪音的基频为

$$f_1 = \frac{v_{\text{CDW}}}{\lambda} = \frac{Q}{2\pi e} J_{DC} \quad (22)$$

FLEMING<sup>[21]</sup> 总结实验结果给出的电荷密度波电导率的经验公式为

$$\sigma(E, T) = \sigma_a(T) + \sigma_b(T) \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) e^{-\frac{E_0}{E - E_T}} \quad (23)$$

式中, 第一项代表普通电导项, 第二项代表非线性电导项。本文得到的式 (21) 与 FLEMING 给出的经验式 (23) 第二项完全符合。关于这部分的具体阐述已在文献[9]中给出, 在此不再赘述。

### [参考文献] (References)

- [1] JAISWAL D, TULAPURKAR A A, RAMAKRISHNAN S, et al. Superconducting parameters of a CDW compound  $\text{Lu}_5\text{Ir}_4\text{Si}_{10}$ [J]. *Physica.*, 2002, 312B: 142~144.
- [2] SEIBOLD G, VARLAMOV S. Spectral properties of incommensurate CDW scattering in cooperates[J]. *Physica.*, 2003, 388C: 309~310.
- [3] LEE P A, RICE T M, ANDERSON P W. Conductivity from charge or spin density waves[J]. *Solid State Commun.*, 1974, 14(8): 703~709.
- [4] FUKUYAMA H, LEE P A. Dynamics of the charge-density wave[J]. *Phys. Rev.B*, 1978, 17: 535~541.

- [5] LEE P A, RICE T M. Electric field depinning of charge density waves[J]. *Phys. Rev.B*, 1979, 19: 3970~3980.
- [6] 田明亮, 石兢, 李世燕, 等. 准二维电荷密度波导体磷酸钨青铜  $(\text{PO}_2)_4(\text{WO}_4)_{2m}$  ( $m=6$ ) 的磁电阻研究[J]. *物理学报*, 2000, 49 (9): 1892~1896.  
TIAN M L, SHI J, LI S Y, et al. Magnetoresistance properties in quasi-two dimensional charge-density wave compound  $(\text{PO}_2)_4(\text{WO}_4)_{2m}(m=6)$ [J]. *Acta. Phys. Sin.*, 2000, 49(9): 1892~1896. (in Chinese)
- [7] 王俊峰, 熊锐, 余恒, 等. 准二维电荷密度波导体钾紫青铜  $\text{K}_x\text{Mo}_6\text{O}_{17}$  单晶样品的制备[J]. *物理学报*, 2004, 53 (3): 895~899.  
WANG J F, XIONG R, YU H, et al. Crystal growth of quasi-two-dimensional purple bronze  $\text{K}_x\text{Mo}_6\text{O}_{17}$ [J]. *Acta. Phys. Sin.*, 2004, 53(3): 895~899. (in Chinese)
- [8] GRÜNER G, ZAWADOWSKI A, CHAIKIN P M. Nonlinear conductivity and noise due to charge-density-wave depinning in  $\text{NbSe}_3$ [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1981, 46(7): 511~515.
- [9] 李连钢, 阮永丰. 电荷密度波经典模型的分析[J]. *物理学报*, 2006, 55 (1): 441~445.  
LI L G, RUAN Y F. Analysis of the classic model of the charge density wave[J]. *Acta. Phys. Sin.*, 2006, 55(1): 441~445. (in Chinese)
- [10] POINCARÉ H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle[J]. *J. Math. Pure. Appl.*, 1881, 7 (3): 375~422.
- [11] POINCARÉ H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle[J]. *J. Math. Pure. Appl.*, 1882, 8: 251~296.
- [12] POINCARÉ H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle[J]. *J. Math. Pure. Appl.*, 1885, 1 (4): 167~244.
- [13] POINCARÉ H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle[J]. *J. Math. Pure. Appl.*, 1886, 2: 151~217.
- [14] DUFF G F D. Limit-cycles and rotated vector fields[J]. *Annals of Math.*, 1953, 57(1): 15~31.
- [15] SEIFERT G. Contributions to the theory of nonlinear oscillations[M]. Princeton: Princeton University Press, 1958.
- [16] 陈翔炎. 广义旋转向量场[J]. *南京大学学报*, 1975 (1): 100~108.  
CHEN X Y. Generalized rotated vector fields[J]. *Acta. Nanjing Uni.*, 1975(1): 100~108. (in Chinese)
- [17] 马知恩. 旋转向量场中奇异闭轨线的运动[J]. *西安交通大学学报*, 1978 (4): 49~65.  
MA Z E. The motion of strange cycles in the rotated vector fields[J]. *J. Xi-an Jiaotong Uni.*, 1978(4): 49~65. (in Chinese)
- [18] 叶彦谦. 极限环论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984.  
YE Y Q. Theory of limit cycles[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1984. (in Chinese)
- [19] URABE M. The least upper bound of a damping coefficient insuring the existence of a periodic motion of a pendulum under constant torque[J]. *Jour. Sci. Hiroshima Un.*, 1954, 18A: 379~389.
- [20] PORTIS A M. Class model of charge density wave transport[J]. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, 1982, 81: 59~72.
- [21] FLEMING R M. Electric-field depinning of charge-density wave in  $\text{NbSe}_3$ [J]. *Phys. Rev.B*, 1980, 22: 5606~5612.