第1卷 第5期
2008 年 7 月
www.paper.edu.cn
中国科技论文在线
Sciencepaper Online
Vol.1 NO.5
July 2008

一个确定性存储模型及其推论

胡　科

（电子科技大学应用数学学院，成都　610054）

摘要：存储论是运筹学的一个重要分支。采用合理的产品存储策略使总费用达到最小，对有效利用资金、提高经济效益具有十分重要的现实意义。有关存储论的教材讲述确定性存储模型主要涉及允许缺货、生产时间很短；不许缺货、生产需一定时间；不许缺货、生产时间很短三种形式，这些模型均采用相似的优化方法进行推导。本文通过建立允许缺货、生产需一定时间这一确定性存储模型，采用微积分理论导出常见的三种形式，从而减少了模型建立的数学推证过程，并能从中了解到模型间的内在本质联系，以达到融会贯通的效果。最后，对这几种模型进行了简要分析比较。

关键词：运筹学；确定性存储模型；最佳存储模型；存储费

中图分类号：O227　　　**文献标识码**：A　　　**文章编号**：1674-2850(2008)00-0601-6

A definite store model and its deduction

HU Ke

(*School of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu*　610054)

Abstract: Inventory theory is an important branch of operation research. Rational store tactic may reach the smallest total charge and plays an important role in fund's efficient utilization and promote economic profit. In discussing definite store models, teaching materials involve mainly three forms, allow lacking of production and less produce time, don't allow lacking of production and definite produce time, don't allow lacking of production and less produce time. These models are inferred by similar optimize methods. making use of foundation of a definite store model about allow lacking of production and definite produce time, This article derives three common models through theory of differentiation and integration, consequently, to reduce mathematical proof procedure of model foundation and to know tight relation between those models, to have an effect on mutual relation. Eventually, the article analyzes and simply compares these models.

Key words: operation research; definite store model; the best store model; store fare

0　引言

产品的合理存储对有效利用资金、提高经济效益具有十分重要的意义。以商店为例，随着销售的进行，商品逐渐减少，到一定时间必须订货补充商品才能使销售正常进行，这时就要考虑存储费和订购费，如允许缺货，还必须考虑缺货费。很明显，本文的要求是采用合理的存储策略（决定何时补充及每次补充数量的策略）使平均总费用达到最小。其它许多方面也涉及到类似问题，如水库蓄水，既要保证电站需求又要防止洪灾发生，那么到底应蓄水多少？在工厂多道工序的连续生产中，既要防止停工待料又要避免原料积压，那么究竟采用多大供给速度？研究这类与存储有关的问题构成了运筹学的一个分支——存储论。

一般教科书[1~2]讲述确定性存储模型主要涉及以下三种——允许缺货、生产时间很短（记为［模型Ⅰ］）；不许缺货、生产需一定时间（记为［模型Ⅱ］）；不许缺货、生产时间很短（记为［模型Ⅲ］）。由于这些模型都是采用相似的优化方法推导而来，那么能否建立一个确定性存储模型并从中导出这三

作者简介：胡科（1964 —），男，副教授，主要研究方向：应用数学、理论计算机科学. E-mail：huke66@126.com

种模型呢？如可行，则既可减少模型建立的数学推证过程，又可从中了解到这几种模型间的紧密联系，起到融会贯通的效果。

1 建立存储模型

1.1 问题的提出

某销售单位出售产品允许缺货，而缺货量在下次订货时不予补偿。每次向生产单位订货后，生产与销售同时进行，达到一定存储量时不再生产，以后销售产品直至存储为零。设需求速度 R、生产速度 P（$>R$）、单位存储费 C_1、单位缺货费 C_2、每次订购费 C_3 均为恒定不变的正数，试求最佳存储模型使平均总费用最小。

1.2 模型求解

以订货周期 T、销售时间 t_2 为策略变量建立使平均总费用最小的存储模型（记为［模型 A］）。

设 t_1 为生产时间，据题设[3]

$$\text{存储函数 } Q_1(\tau)=\begin{cases}(P-R)\tau & \tau\in[0,t_1]\\(P-R)t_1-R(\tau-t_1) & \tau\in[t_1,t_2]\\0 & \tau\in[t_2,T]\end{cases}$$

$Q_1(\tau)$ 随时间 τ 变化如图 1 所示。其中，$[0,t_1]$ 生产、销售同时进行，$[t_1,t_2]$ 销售进行，$[t_2,T]$ 缺货（存储为 0 表示缺货）。

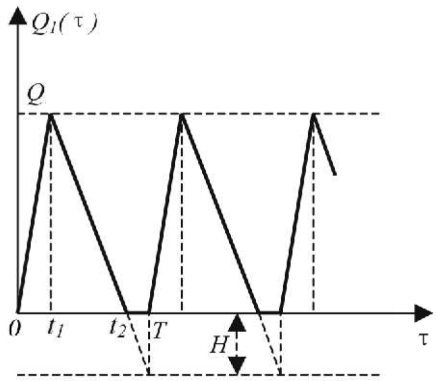

图 1 ［模型 A］中存储函数 $Q_1(\tau)$ 随时间 τ 的变化趋势

Fig. 1 Trend of $Q_1(\tau)$ follow τ in model A

1）求生产时间 t_1

t_1 时的最大存储量（$P-R$）t_1 应满足［t_1，t_2］的需求量 R（t_2-t_1），因此

$$(P-R)t_1=R(t_2-t_1) \tag{1}$$

$$t_1=\frac{R}{P}t_2 \tag{2}$$

2）求［0，T］的存储费、缺货费、订购费[4~5]

利用式（1）、式（2），［0，T］的存储费为

$$\int_0^{t_1}C_1(P-R)\tau d\tau+\int_{t_1}^{t_2}C_1[(P-R)t_1-R(\tau-t_1)]d\tau$$

$$=\int_0^{t_1}C_1(P-R)\tau d\tau+\int_{t_1}^{t_2}C_1[R(t_2-t_1)-R(\tau-t_1)]d\tau$$

$$=C_1\Big[(P-R)\int_0^{t_1}\tau d\tau+R\int_{t_1}^{t_2}(t_2-\tau)d\tau\Big]=C_1\Big[\frac{P-R}{2}t_1^2+R(t_2-t_1)t_2-\frac{1}{2}R(t_2-t_1)(t_2+t_1)\Big]$$

$$=C_1\Big[\frac{P-R}{2}t_1^2+(P-R)t_1t_2-\frac{P-R}{2}(t_1+t_2)t_1\Big]=\frac{C_1(P-R)}{2}t_1t_2=\frac{C_1R(P-R)}{2P}t_2^2$$

缺货函数 $H(\tau)=R(\tau-t_2)\quad \tau\in[t_2,\ T]$

［0，T］的缺货费为 $\int_{t_2}^{T}C_2R(\tau-t_2)d\tau=\frac{C_2R}{2}(T-t_2)^2$

［0，T］的订购费为 C_3

3）求使平均总费用最小的存储模型[6]

$$\text{平均总费用函数 } C(t_2,\ T)=\frac{1}{T}\Big[\frac{C_1R(P-R)}{2P}t_2^2+\frac{C_2R}{2}(T-t_2)^2+C_3\Big]$$

$$\frac{\partial C(t_2,\ T)}{\partial t_2}=\frac{1}{T}\Big[\frac{C_1R(P-R)}{P}t_2-C_2R(T-t_2)\Big]$$

$$\frac{\partial C(t_2,T)}{\partial T_2}=-\frac{1}{2PT^2}[R(C_1P-C_1R+C_2P)t_2^2+2C_3P-C_2RPT^2]$$

令 $\frac{\partial C(t_2,T)}{\partial t_2}=0$，$\frac{\partial C(t_2,T)}{\partial T}=0$

得

$$C_2PT=(C_1P-C_1R+C_2P)t_2 \tag{3}$$

$$C_2RPT^2=R(C_1P-C_1R+C_2P)t_2^2+2C_3P \tag{4}$$

联立式（3）、式（4）解得最佳销售时间

$$t_2^{(1)}=\sqrt{\frac{2C_2C_3P^2}{C_1R(P-R)(C_1P-C_1R+C_2P)}}$$

利用式（3）得最佳订货周期

$$T^{(1)}=\sqrt{\frac{2C_3(C_1P-C_1R+C_2P)}{C_1C_2R(P-R)}}$$

利用式（2）得最佳生产时间

$$t_1^{(1)}=\sqrt{\frac{2C_2C_3R}{C_1(P-R)(C_1P-C_1R+C_2P)}}$$

最佳订货量（最佳生产量）

$$S^{(1)}=Pt_1^{(1)}=\sqrt{\frac{2C_2C_3RP^2}{C_1(P-R)(C_1P-C_1R+C_2P)}}$$

最佳存储量

$$Q^{(1)}=(P-R)t_1^{(1)}=\sqrt{\frac{2C_2C_3R(P-R)}{C_1(C_1P-C_1R+C_2P)}}$$

最佳缺货量

$$H^{(1)}=R(T^{(1)}-t_2^{(1)})=\sqrt{\frac{2C_1C_3(P-R)}{C_2R(C_1P-C_1R+C_2P)}}$$

利用式（3）得最小平均总费用[7]

$$C^{(1)}=C(t_2^{(1)},T^{(1)})=\frac{1}{T^{(1)}}\left[\frac{C_1R(P-R)}{2P}t_2^{(1)^2}+\frac{C_2R}{2}(T^{(1)}-t_2^{(1)})^2+C_3\right]$$

$$=\frac{1}{T^{(1)}}\left[\frac{C_1R(P-R)}{2P}t_2^{(1)^2}+\frac{C_1^2R}{2C_2P^2}(P-R)^2t_2^{(1)^2}+C_3\right]=\sqrt{\frac{2C_1C_2C_3R(P-R)}{C_1P-C_1R+C_2P}}$$

故在允许缺货、生产需一定时间的情况下，每隔 $\sqrt{\frac{2C_3(C_1P-C_1R+C_2P)}{C_1C_2R(P-R)}}$，订货 $\sqrt{\frac{2C_2C_3RP^2}{C_1(P-R)(C_1P-C_1R+C_2P)}}$，可使平均总费用最小为 $\sqrt{\frac{2C_1C_2C_3R(P-R)}{C_1P-C_1R+C_2P}}$。

由于 $P>R$，$T^{(1)}>t_2^{(1)}>t_1^{(1)}$ 显然成立，直观上，$T=t_2$ 时缺货费为 0，但 $\frac{\partial C(t_2,T)}{\partial T}<0$，$\frac{\partial C(t_2,T)}{\partial t_2}>0$。亦即，在 $T=t_2$ 达不到 C（t_2，T）的最小值 $C^{(1)}$，当 $T=t_2$ 时，形成［模型Ⅱ］，本

文最后将比较这两种模型优劣。

2 相关推论

2.1 模型的推论

根据［模型A］可得如下三个推论：

推论1 当$P\to\infty$时

最佳订货周期 $T^{(2)}=\lim\limits_{P\to\infty}T^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_3}{C_1C_2R}(C_1+C_2)}$

最佳订货量 $S^{(2)}=\lim\limits_{P\to\infty}S^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_2C_3R}{C_1(C_1+C_2)}}$

最佳存储量 $Q^{(2)}=\lim\limits_{P\to\infty}Q^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_2C_3R}{C_1(C_1+C_2)}}=S^{(2)}$

最佳销售时间 $t_2^{(2)}=\lim\limits_{P\to\infty}t_2^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_2C_3}{C_1R(C_1+C_2)}}$

最佳缺货量 $H^{(2)}=\lim\limits_{P\to\infty}H^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_1C_3}{C_2R(C_1+C_2)}}$

最小平均总费用 $C^{(2)}=\lim\limits_{P\to\infty}C^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_1C_2C_3R}{C_1+C_2}}$

显然 $t_1^{(2)}=\lim\limits_{P\to\infty}t_1^{(1)}=0$

存储函数$Q_2(\tau)$随时间τ变化如图2所示。

在允许缺货、生产时间很短的情况下（除忽略生产时间外，其余假设同［模型A］），每隔$\sqrt{\dfrac{2C_3}{C_1C_2R}(C_1+C_2)}$，订货$\sqrt{\dfrac{2C_2C_3R}{C_1(C_1+C_2)}}$，可使平均总费用最小为$\sqrt{\dfrac{2C_1C_2C_3R}{C_1+C_2}}$（此即为［模型Ⅰ］）。

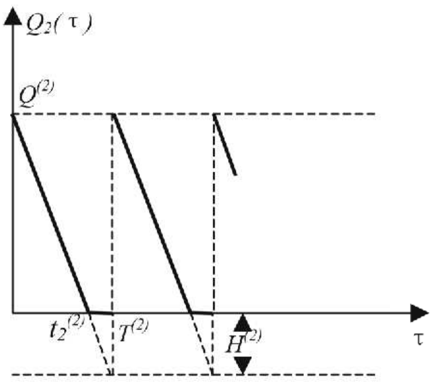

图2 ［模型Ⅰ］中存储函数Q_2（τ）随时间τ的变化趋势

Fig. 2 Trend of $Q_2(\tau)$ follow τ in model Ⅰ

推论2 当$C_2\to\infty$时

最佳订货周期 $T^{(3)}=\lim\limits_{C_2\to\infty}T^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_3P}{C_1R(P-R)}}$

最佳销售时间 $t_2^{(3)}=\lim\limits_{C_2\to\infty}t_2^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_3P}{C_1R(P-R)}}=T^{(3)}$

最佳订货量 $S^{(3)}=\lim\limits_{C_2\to\infty}S^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}$

最佳存储量 $Q^{(3)}=\lim\limits_{C_2\to\infty}Q^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_3R(P-R)}{C_1P}}$

最佳生产时间 $t_1^{(3)}=\lim\limits_{C_2\to\infty}t_1^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_3R}{C_1(P-R)P}}$

最小平均总费用 $C^{(3)}=\lim\limits_{C_2\to\infty}C^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_1C_3R(P-R)}{P}}$

显然 $H^{(3)}=\lim\limits_{C_2\to\infty}H^{(1)}=0$

存储函数Q_3（τ）随时间τ变化如图3所示。

在不许缺货，生产需一定时间的情况下（除忽略缺货时间外，其余假设同［模型 A］），每隔 $\sqrt{\dfrac{2C_3P}{C_1R(P-R)}}$，订货 $\sqrt{\dfrac{2C_3RP}{C_1(P-R)}}$，可使平均总费用最小为 $\sqrt{\dfrac{2C_1C_3R(P-R)}{P}}$（此即为［模型Ⅱ］）。

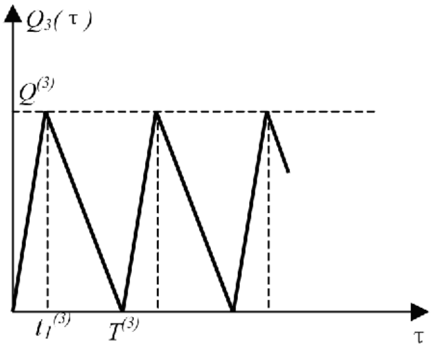

图 3　［模型Ⅱ］中存储函数 $Q_3(\tau)$ 随时间 τ 的变化趋势
Fig. 3　Trend of $Q_3(\tau)$ follow τ in model Ⅱ

推论 3　当 $P\to\infty$、$C_2\to\infty$ 时

最佳订货周期 $T^{(4)}=\lim\limits_{\substack{P\to\infty\\C_2\to\infty}}T^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_3}{C_1R}}$

最佳销售时间 $t_2^{(4)}=\lim\limits_{\substack{P\to\infty\\C_2\to\infty}}t_2^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_3}{C_1R}}=T^{(4)}$

最佳订货量 $S^{(4)}=\lim\limits_{\substack{P\to\infty\\C_2\to\infty}}S^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_3R}{C_1}}$

最佳存储量 $Q^{(4)}=\lim\limits_{\substack{P\to\infty\\C_2\to\infty}}Q^{(1)}=\sqrt{\dfrac{2C_3R}{C_1}}=S^{(4)}$

最小平均总费用 $C^{(4)}=\lim\limits_{\substack{P\to\infty\\C_2\to\infty}}C^{(1)}=\sqrt{2C_1C_3R}$

显然 $H^{(4)}=\lim\limits_{\substack{P\to\infty\\C_2\to\infty}}H^{(1)}=0$、 $t_1^{(4)}=\lim\limits_{\substack{P\to\infty\\C_2\to\infty}}t_1^{(1)}=0$

存储函数 $Q_4(\tau)$ 随时间 τ 变化如图 4 所示。

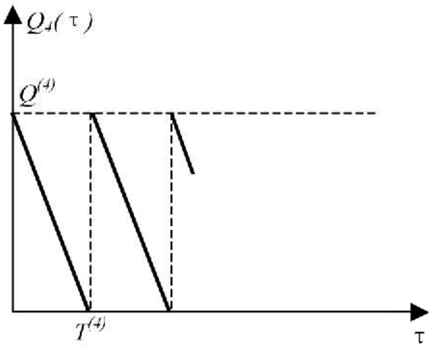

图 4　［模型Ⅲ］中存储函数 $Q_4(\tau)$ 随时间 τ 的变化趋势
Fig. 4　Trend of $Q_4(\tau)$ follow τ in model Ⅲ

在不许缺货，生产时间很短的情况下（除忽略缺货时间、生产时间外，其余假设同［模型 A］），每隔 $\sqrt{\dfrac{2C_3}{C_1R}}$，订货 $\sqrt{\dfrac{2C_3R}{C_1}}$，可使平均总费用最小为 $\sqrt{2C_1C_3R}$（此即为［模型Ⅲ］）。

到此，通过建立允许缺货、生产需一定时间的确定性存储模型导出了本文开始提到的三种模型。从推证过程中，可以清晰地看到这几种模型间的内在联系。

2.2　模型比较

缺货是一种损失，一般不许缺货，其代价是增加库存量和订货次数，因而要多付存储费和订购费。允许缺货时，虽然要多付缺货费，但换来了库存量和订货次数的减少，因而可少付存储费和订购费，而且节约的费用有可能大于缺货损失，在不影响需求，销售单位除少量缺货损失外无其他损失，这时对该单位是有利的。以下通过［模型 A］、［模型Ⅱ］在最佳情况下的对比来说明此问题[8]。

设 $C^{(1)}$ 为［模型 A］最小平均总费用；$T^{(1)}$ 为［模型 A］最佳订货周期；$E^{(1)}$ 为［模型 A］最佳平均存储费；$F^{(1)}$ 为［模型 A］最佳平均订购费；$G^{(1)}$ 为［模型 A］最佳平均缺货费；$C^{(3)}$ 为［模型Ⅱ］最小平均总费用；$T^{(3)}$ 为［模型Ⅱ］最佳订货周期；$E^{(3)}$ 为［模型Ⅱ］最佳平均存储费；$F^{(3)}$ 为［模型Ⅱ］最佳平均订购费。

$$E^{(1)}=\frac{1}{T^{(1)}}\frac{C_1R(P-R)}{2P}t_2^{(1)^2}=\sqrt{\frac{C_1C_2^3C_3R(P-R)P^2}{2(C_1P-C_1R+C_2P)^3}}$$

$$E^{(3)}=\lim_{C_2\to\infty}E^{(1)}=\sqrt{\frac{C_1C_3R(P-R)}{2P}}$$

$$F^{(1)}=\frac{1}{T^{(1)}}C_3=\sqrt{\frac{C_1C_2C_3R(P-R)}{2(C_1P-C_1R+C_2P)}}\qquad F^{(3)}=\lim_{C_2\to\infty}F^{(1)}=\sqrt{\frac{C_1C_3R(P-R)}{2P}}$$

$$G^{(1)}=\frac{1}{T^{(1)}}\frac{C_1^2R}{2C_2P^2}(P-R)^2t_2^{(1)^2}=\sqrt{\frac{C_1^3C_2C_3R(P-R)^3}{2(C_1P-C_1R+C_2P)^3}}$$

当 $P>R$ 时，$T^{(1)}>T^{(3)}$ 、$C^{(1)}<C^{(3)}$ 、$E^{(1)}<E^{(3)}$ 、$F^{(1)}<F^{(3)}$

因 $E^{(1)}+F^{(1)}+G^{(1)}=C^{(1)}$ 、$E^{(3)}+F^{(3)}=C^{(3)}$ ，利用 $C^{(1)}<C^{(3)}$ 得：

$$G^{(1)}<(E^{(3)}-E^{(1)})+(F^{(3)}-F^{(1)})$$

亦即，由于允许缺货，订货周期延长，存储费、订购费减少，且节约费用弥补了缺货损失，从而总费用减少（比较［模型Ⅰ］、［模型Ⅲ］结论相同）。

3 结论

通过建立允许缺货、生产需一定时间这一确定性存储模型，利用微积分理论，导出了允许缺货、生产时间很短；不许缺货、生产需一定时间；不许缺货、生产时间很短三种形式，并得出相关推论。既减少了模型建立的数学推证过程，又能从中看到模型间的内在本质联系。同时，从模型的分析比较中了解到，在不影响需求的情况下允许缺货，可以带来总费用的减少，这对销售单位是有利的。

［参考文献］(References)

［1］ 运筹学教材编写组. 运筹学（修订版）[M]. 北京：清华大学出版社，1997.
Writing Group of Operation Research Teaching Materials. Operation research (Revised) [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. (in Chinese)

［2］ 黄洁纲. 存贮论原理及其应用[M]. 上海：上海科学技术文献出版社，1984.
HUANG J G. Principle and application of store theory[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Literature Press, 1984. (in Chinese)

［3］ 孙文瑜，徐成贤，朱德通. 最优化方法[M]. 北京：高等教育出版社，2005.
SUN W Y, XU C X, ZHU D T. Optimize methods[M]. Beijing: Higher Education Press, 2005. (in Chinese)

［4］ KULKARNI V G. 应用随机模型（英文影印版）[M]. 北京：清华大学出版社，2004.
KULKARNI V G. Applied stochastic models (English vergion of photocopying)[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)

［5］ NOCEDAL J, WRIGHT S. 数值最优化（英文影印版）[M]. 北京：科学出版社，2006.
NOCEDAL J, WRIGHT S. Numerical optimization (English vergion of photocopying)[M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese)

［6］ 陈宝林. 最优化理论与算法（第 2 版）[M]. 北京：清华大学出版社，2005.
CHEN B L. Optimize theory and algorithm (Second Edition) [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005. (in Chinese)

［7］ 袁亚湘，孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2003.
YUAN Y X, SUN W Y. Optimize theory and methods[M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese)

［8］ 曹卫华. 最优化技术方法及 MATLAB 的实现[M]. 北京：化学工业出版社，2005.
CAO W H. Optimize technology and MATLAB's realization[M]. Beijing: Chemistry Industry Press, 2005. (in Chinese)