

1 TOPSIS 法

1.1 原理

TOPSIS 法的基本思路是定义决策问题的理想解和负理想解，然后在可行方案中找到一种方案，使其距理想解的距离最近，而距负理想解的距离最远。理想解一般是设想最好的方案，它所对应的各个属性至少达到各个方案中的最好值；负理想解是假设最坏的方案，其对应的各个属性至少不优于各个方案中的最劣值。方案排队的决策规则^[3]是把实际可行解与理想解及负理想解作比较，若某个可行解最靠近理想解，同时又最远离负理想解，则此解是方案集的满意解^[2]。

1.2 距离的度量

采用相对接近度量，设决策问题有 m 个目标 f_i ， n 个可行方案 X_i ，并设该问题的规范化加权目标的理想点是 Z^* ， $Z^* = [Z_1^+, Z_2^+, \dots, Z_m^+]^T$ ，那么用欧几里德范数作为距离的度量，则从任意可行点到 Z^* 的距离为

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^m (Z_{ij} - Z_j^+)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

同理，设 $Z^{*-} = [Z_1^-, Z_2^-, \dots, Z_m^-]^T$ ，则任意解到负理想解之间的距离为

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^m (Z_{ij} - Z_j^-)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

其中， Z_{ij} 为第 j 个目标对第 i 个方案的规范化加权值。那么，某一可行解对于理想解的相对接近度定义为

$$C_i^* = S_i^- / (S_i^- + S_i^+), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad 0 \leq C_i^* \leq 1 \quad (3)$$

于是，若 X_i 是理想解，则相应的 $C_i^* = 1$ ；若 X_i 是负理想解，则相应的 $C_i^* = 0$ 。 X_i 愈靠近理想解， C_i^* 愈接近 1；反之，愈接近于 0。那么，可以对 C_i^* 进行排队，得以求出满意解^[2,4]。

1.3 计算步骤

第一步：设某一决策问题，其决策矩阵为 A 。由 A 可以构成规范化的决策矩阵 Z' ，其元素为 Z'_{ij} ，且有

$$Z'_{ij} = f_{ij} / \sqrt{\sum_{i=1}^n f_{ij}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

式中， f_{ij} 由决策矩阵给出

$$A = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nm} \end{bmatrix}$$

第二步：构造规范化的加权决策矩阵 Z ，其元素为 Z_{ij} ，有

$$Z_{ij} = w_j \cdot Z'_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m) \quad (6)$$

其中， w_j 为第 j 个目标的权。

第三步：确定理想解与负理想解。设 J 代表效益型目标集， J' 代表成本型目标集，有

$$\begin{aligned} Z^+ &= \{(\max Z_{ij} | j \in J'), (\min Z_{ij} | i \in J') | i = 1, 2, \dots, n\} \\ &= \{Z_1^+, Z_2^+, \dots, Z_m^+\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$Z^- = \{(\min_i Z_{ij} | j \in J'), (\max_i Z_{ij} | j \in J') | i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$= \{Z_1^-, Z_2^-, \dots, Z_m^-\} \quad (8)$$

第四步：计算每个方案到理想点的距离 S_i^+ 和到负理想的距离 S_i^- 。

第五步：按式 (3) 计算 C_i^* ，并按每个方案的相对接近度 C_i^* 大小排序，找出满意解^[5]。

1.4 改进之处

1) 上面第三步中的 Z_{ij} 还原为 Z'_{ij} ，并作为第二步，以下过程都是在此基础上进行的。

2) 原来的第二步换为：目标集中的评价指标按其指标值的相对变化率的大小确定其权重 w_j ，具体计算如下

$$a_j = \left| \frac{Z_j^+ - Z_j^-}{Z_j^+} \right| \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad w_j = \frac{a_j}{\sum_{k=1}^m a_k} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

并作为第三步。

3) 计算各个目标单元到理想解和负理想解距离的式 (1) 和式 (2) 修改为下面两个公式，分别记作 D_i^+ 和 D_i^- ，其中，

$$D_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^m [w_j (Z_{ij} - Z_j^+)]^2}, D_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^m [w_j (Z_{ij} - Z_j^-)]^2} \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$$

2 实例分析

水质环境检测数据来自开封市环保局。表 1 列出了开封市 13 个检测断面石油类、生化需氧量、化学需氧量、高锰酸盐指数、氨氮、挥发酚、砷、氟化物、总铅、总磷、总氮等 11 项水质污染指数检测值^[6]。

表 1 检测断面的检测值 (mg/L)
Tab. 1 The values of testing sections (mg/L)

检测断面	石油类	生化需氧量	化学需氧量	高锰酸盐指数	氨氮	挥发酚	砷	氟化物	总铅	总磷	总氮
1	2.288	14.73	54.40	9.81	0.811	0.003	0.004	0.933	0.070	0.100	4.78
2	0.500	14.70	64.40	8.88	0.786	0.100	0.004	0.933	0.070	0.100	4.78
3	9.580	102.50	134.45	56.45	22.500	0.143	0.005	1.500	0.070	0.100	4.78
4	5.545	102.35	214.00	51.85	23.050	0.022	0.002	1.500	0.070	0.100	4.78
5	6.250	80.10	222.50	37.65	7.525	0.026	0.100	2.260	0.070	0.100	4.78
6	0.500	79.65	150.50	46.25	94.050	0.100	0.145	36.500	0.328	0.100	4.78
7	0.500	49.53	119.00	26.00	47.950	0.100	0.100	1.500	0.070	0.100	4.78
8	6.545	169.55	333.50	98.10	37.750	0.224	0.021	1.500	0.070	0.100	4.78
9	8.480	270.55	433.00	156.00	25.850	0.092	0.034	1.500	0.070	0.100	4.78
10	6.770	16.00	61.20	9.43	14.055	0.004	0.004	1.500	0.070	0.100	4.78
11	0.500	8.15	27.55	4.44	0.149	0.100	0.100	1.500	0.070	0.100	4.78
12	3.380	34.70	100.50	18.40	0.736	0.100	0.100	1.500	0.070	0.535	4.26
13	3.160	31.30	94.00	18.40	2.360	0.100	0.100	1.500	0.050	0.100	4.78

利用文中建立的改进 TOPSIS 法优化模型，首先对检测断面的水质污染指标进行无量纲处理。因为环境检测指标值越大环境质量越差，所以按成本型目标集构筑规范化优化矩阵，并分别计算各检测指标的权重 w_j 及各检测断面的 D_i^+ ， D_i^- ， C_i 。

最后根据相对接近度的大小确定排序，同时结合点位优化原则进行检测断面的优化，具体结果如表 2 所示。最终筛选出的优化断面为 1，4，6，8，9 和 11 号。其中 1 号可以作为 1，2 号的代表断面；11 号可以作为 5，10，11，12，13 号的代表断面；4 号可以作为 3，4 号的代表断面；8 号可以

表2 各检测断面的 D_i^+ , D_i^- , C_i 及优化结果
Tab.2 The values of D_i^+ , D_i^- , C_i for every testing section and their optimization result

检测断面	D_i^+	D_i^-	C_i	点位排序	优化点位	代表点位
1	0.738 0	0.016 3	0.978 4	1	1	1, 2
2	0.726 2	0.073 9	0.907 6	2	—	—
10	0.657 5	0.106 8	0.860 3	3	—	—
11	0.716 1	0.130 8	0.845 6	4	11	5, 10, 11, 12, 13
12	0.703 7	0.140 0	0.834 1	5	—	—
13	0.694 2	0.138 3	0.833 9	6	—	—
5	0.662 3	0.141 3	0.824 1	7	—	—
4	0.586 8	0.177 7	0.767 6	8	4	4, 3
3	0.571 9	0.210 2	0.731 2	9	—	—
9	0.533 2	0.286 6	0.650 5	10	9	9
8	0.463 2	0.336 8	0.579 0	11	8	7, 8
7	0.443 0	0.339 3	0.566 3	12	—	—
6	0.191 4	0.699 0	0.214 9	13	6	6

注：1—邸阁断面；2—黄汴河孙李塘断面；3—黄汴河羊市桥断面；4—东护城河滨河路断面；5—药厂河蓝天断面；6—东郊沟皮屯断面；7—惠济河太平岗；8—惠济河陈留桥断面；9—惠济河裴村店断面；10—马家河芦花岗；11—柳池；12—龙亭湖；13—包公湖

代表 7, 8 号断面；6 号和 9 号各自独立。

3 结论

本文对多目标系统的优化布点方法进行了研究，提出了改进的 TOPSIS 法优化模型，并用于水质环境检测点位^[7~8]的优化，实例分析表明：TOPSIS 法优化结果符合客观实际，应用于环境检测点优化布点是切实可行的。

[参考文献] (References)

- [1] 刘健. 在多目标决策中利用基点计算权重[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21 (4): 27~30.
LIU J. Using basic points to calculate the weighting coefficients in multiple objective decision making[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2001, 21(4): 27~30. (in Chinese)
- [2] 李春晖, 李爱贞. TOPSIS 法在环境质量综合评价中的应用[J]. 地质灾害与环境保护, 1999, 10 (2): 1~6.
LI C H, LI A Z. The application of TOPSIS method to comprehensive assessment of environmental quality[J]. Journal of Geological Hazards and Environment Preservation, 1999, 10(2): 1~6. (in Chinese)
- [3] 萧树铁. 数学实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
XIAO S T. Mathematics experiment[M]. Beijing: Higher Education Press, 1999. (in Chinese)
- [4] 汪泽焱, 益晓新, 张申如. 基于理想最优方案的指标赋权法及其应用[J]. 系统工程, 2002, 20 (2): 6~9.
WANG Z Y, YI X X, ZHANG S R. A method of determining the index weight based on ideal optimization scheme and its application[J]. Systems Engineering, 2002, 20(2): 6~9. (in Chinese)
- [5] ZHANG M Y, WANG S J. The study on optimal number of sites by TOPSIS method squares estimator is blue[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2006(2):1~4.
- [6] 环境影响评价大纲[Z]. 郑州: 河南省环境保护研究所, 2004.
The outline of environmental impact assessment[Z]. Zhengzhou: The Institute of Henan Environmental Protection, 2004. (in Chinese)
- [7] 阎吉昌. 环境分析[M]. 北京: 化学工业出版社, 2002.
YAN J C. Environmental analysis[M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2002. (in Chinese)
- [8] 洪林, 李明罡, 李远华. 开封市水资源预测研究[J]. 中国水利, 2006 (3): 45~46.
HONG L, LI M G, LI Y H. Forecast study on water resources in Kaifeng city[J]. China Water Resources, 2006 (3): 45~46. (in Chinese)